

## Tesis Doctoral

# Modelos de segmentación basados en regiones y contornos activos aplicados a imágenes de radar de apertura sintética

Gambini, María Juliana

2006

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

#### Cita tipo APA:

Gambini, María Juliana. (2006). Modelos de segmentación basados en regiones y contornos activos aplicados a imágenes de radar de apertura sintética. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

#### Cita tipo Chicago:

Gambini, María Juliana. "Modelos de segmentación basados en regiones y contornos activos aplicados a imágenes de radar de apertura sintética". Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2006.

**EXACTAS** UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



**UBA**

Universidad de Buenos Aires



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN

# **Modelos de Segmentación basados en Regiones y Contornos Activos aplicados a Imágenes de Radar de Apertura Sintética**

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de  
Buenos Aires en el área de Computación

María Juliana Gambini

Directora de tesis: Dra. Marta Estela Mejail

Lugar de trabajo: Departamento de Computación, FCEyN, UBA

Buenos Aires, 2006



*A Manu y Mateo*

*A mis Padres*



## Resumen

Las imágenes de Radar de Apertura Sintética (SAR), tanto monopolarizadas como polarimétricas, son de suma importancia en la comprensión y entendimiento del medio ambiente, porque a partir de ellas puede obtenerse información que ningún otro tipo de imágenes provee. Sin embargo, las imágenes SAR tienen la desventaja de que son muy difíciles de analizar e interpretar. Hallar el contorno de regiones es una tarea particularmente complicada en este tipo de imágenes, debido al ruido *speckle* que corrompe la imagen e impide encontrar los puntos de la frontera entre diferentes regiones.

En esta tesis se presenta un nuevo enfoque en modelado, extracción de características, detección de bordes y segmentación de imágenes SAR, por medio del ajuste del contorno de regiones en la imagen.

Comienza con una síntesis sobre las herramientas que utilizamos durante todo el trabajo: las imágenes SAR monopolarizadas, la familia de distribuciones estadísticas  $\mathcal{G}$  y las curvas B-Spline.

Luego se introduce una serie de procedimientos para detección de bordes en imágenes SAR, basados en hallar puntos de borde entre regiones a lo largo de segmentos de recta estratégicamente dispuestos sobre la imagen. Estos algoritmos comienzan con el proceso de inicialización, que consiste en ubicar una curva B-Spline, y continúan con los métodos de detección que trabajan en un entorno de la misma. El objetivo de la inicialización es que los métodos tengan más rápida convergencia y menor costo computacional. Los métodos de contornos deformables fallan cuando el objeto de interés no es convexo, proponemos entonces un algoritmo que soluciona los problemas que dependen de la forma del objeto.

Se exponen también dos métodos alternativos en la búsqueda de los puntos de borde: uno que utiliza difusión anisotrópica para suavizar el arreglo de estimaciones y otro basado en estimaciones de la dimensión fractal. Todos los métodos son evaluados y comparados. Finalmente se presenta un algoritmo de detección de bordes en imágenes SAR polarimétricas.

La validez y eficiencia de los métodos presentados está rigurosamente confirmada por experimentaciones en imágenes sintéticas y reales.

## Abstract

Synthetic Aperture Radar (SAR) images, both monopolarized and polarimetric, are a very important tool in the understanding of the environment, because they provide information no other sensor can provide. Nevertheless, these images have the disadvantage of being very difficult of analyzing and interpreting. Finding region contours is a particularly complicated task in this type of images, due to the speckle noise that degrades them and makes it difficult to find the border points between two regions.

This thesis presents a new approach for modelling, feature extraction, boundary detection and segmentation in SAR images, using region contour fitting.

We begin with a synthesis about the tools we will use throughout this work: monopolarized SAR images, the  $\mathcal{G}$  family of statistical distributions and the B-Spline curves.

After this, a series of procedures for boundary detection in SAR images, based on finding points on the frontier between two regions along straight lines conveniently placed on the image, is introduced. These algorithms begin with an initialization process that consists in placing a B-Spline curve, and continue with detection methods that operate in a neighborhood of it. The objective of the initialization is allow all methods to converge faster and with a lower computational cost. The deformable contour methods fail when the object of interest is not convex. We thus propose an algorithm that solves the problems that depend on the object's shape.

We also expose two alternative methods for the search of the border points: one that uses anisotropic diffusion for smoothing the array of estimates, and other based on fractal dimension estimates. All the methods are evaluated and compared. Finally, a border detection algorithm in polarimetric SAR images, is presented.

The validity and efficiency of the presented methods is rigurously confirmed by experiments in synthetic and real SAR images.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>17</b>
<b>2. Imágenes de Radar de Apertura Sintética</b>	<b>21</b>
2.1. Adquisición de Imágenes . . . . .	23
2.2. El Ruido <i>Speckle</i> . . . . .	27
2.3. Conclusiones . . . . .	30
<b>3. La familia de distribuciones <math>\mathcal{G}</math> para datos provenientes de imágenes SAR</b>	<b>31</b>
3.1. Modelo Estadístico para el Ruido <i>Speckle</i> . . . . .	32
3.2. Modelo estadístico para la retrodispersión . . . . .	34
3.3. Modelo estadístico para el Retorno . . . . .	36
3.4. La distribución $\mathcal{G}_A^0$ . . . . .	38
3.4.1. Estimación de parámetros . . . . .	39
3.4.2. Interpretación de parámetros . . . . .	44
3.4.3. Generación de datos distribuidos con distribución $\mathcal{G}_A^0$ . . . . .	45
3.5. La distribución $\mathcal{G}^H$ . . . . .	48
3.6. Conclusiones . . . . .	51
<b>4. Representación B-Spline de curvas</b>	<b>57</b>
4.1. Curvas B-Spline, puntos de control y la base B-Spline . . . . .	58
4.2. Ajuste de de puntos por curvas B-Spline . . . . .	61
4.3. Conclusiones . . . . .	63
<b>5. Detección de contornos en imágenes SAR utilizando la distribución <math>\mathcal{G}_A^0</math> y curvas B-Spline</b>	<b>67</b>
5.1. Regiones iniciales de búsqueda . . . . .	69



5.2. Proceso de detección de bordes . . . . .	71
5.3. Muestras para estimar los parámetros . . . . .	73
5.4. Proceso de búsqueda del primer punto de borde $b_1$ . . . . .	76
5.5. Problemas y Soluciones . . . . .	77
5.6. Aplicación a datos reales . . . . .	81
5.7. Conclusiones . . . . .	81
<b>6. Detección de contornos en imágenes SAR usando Difusión Anisotrópica</b>	<b>87</b>
6.1. El proceso de difusión en procesamiento de imágenes . . . . .	88
6.2. Difusión Anisotrópica . . . . .	89
6.3. Segmentación de imágenes SAR usando Difusión Anisotrópica y contornos deformables . . . . .	92
6.4. Resultados . . . . .	95
6.5. Conclusiones . . . . .	96
<b>7. Detección de contornos en imágenes SAR utilizando la Dimensión Frac- tal</b>	<b>99</b>
7.1. Definición de Dimensión Fractal . . . . .	100
7.2. Estimaciones de la dimensión de una región en una imagen . . . . .	101
7.2.1. Dimensión <i>box-counting</i> . . . . .	101
7.2.2. Dimensión <i>Box-Counting</i> Diferencial . . . . .	104
7.3. Detección de bordes de objetos en una escena . . . . .	105
7.4. Resultados . . . . .	106
7.5. Conclusiones . . . . .	106
<b>8. Evaluación y Comparación de los Métodos Propuestos</b>	<b>111</b>
8.1. Error en la Estimación del Punto de Borde (Error Local) . . . . .	112
8.2. Error en el Ajuste del Contorno por una Curva (Error Global) . . . . .	114
8.3. Comparación entre los métodos propuestos . . . . .	117
8.3.1. Error Local . . . . .	117
8.3.2. Error Global . . . . .	119
8.4. Índice de dificultad para encontrar el borde . . . . .	123
8.5. Conclusiones . . . . .	125

<b>9. Detección de contornos en imágenes SAR polarimétricas</b>	<b>127</b>
9.1. Modelo matemático para datos SAR Polarimétricos . . . . .	128
9.2. Distribuciones utilizadas para modelar los datos SAR polarimétricos . . . .	129
9.2.1. Distribución Gaussiana Compleja Multivariada . . . . .	129
9.2.2. Distribución Wishart Compleja Centrada . . . . .	130
9.3. El modelo multiplicativo para datos SAR Polarimétricos . . . . .	131
9.3.1. Versión Polarimétrica de la distribución $\mathcal{G}^H$ . . . . .	132
9.3.2. Estimación de Parámetros . . . . .	133
9.3.3. Interpretación de parámetros . . . . .	134
9.3.4. Generación de Variables Aleatorias con distribución $\mathcal{G}^H$ . . . . .	134
9.4. Detección de Bordes . . . . .	136
9.5. Resultados . . . . .	138
9.6. Evaluación del error en el cálculo del punto de borde . . . . .	138
9.7. Conclusiones . . . . .	139
<b>10. Conclusiones, Trabajos Publicados y Trabajos Futuros</b>	<b>143</b>
10.1. Conclusiones . . . . .	143
10.2. Trabajos Publicados . . . . .	145
10.3. Trabajos Futuros . . . . .	147
<b>A. Propiedades de Convergencia de las Distribuciones</b>	<b>149</b>
<b>B. Densidad del Retorno <math>Z</math></b>	<b>151</b>
<b>C. La Base B-Spline</b>	<b>153</b>
C.1. B-Spline usando matrices <i>span</i> . . . . .	155
C.2. Implementación . . . . .	157
<b>D. Implementación del Algoritmo de Difusión Anisotrópica</b>	<b>159</b>



# Índice de figuras

2.1. Geometría del Radar de Apertura Sintética. . . . .	23
2.2. Geometría del Radar de Apertura Sintética: corte transversal mostrando el ángulo de incidencia $\theta$ . . . . .	25
2.3. Suma de $N_s$ fasores elementales de módulo y fase aleatorias. . . . .	28
2.4. Imagen real, obtenida por el sensor E-SAR sobre los alrededores de Munich, Alemania. Se nota el granulado de la imagen producido por el ruido <i>speckle</i> . . . . .	29
3.1. Gráficos de la función de densidad $\Gamma^{1/2}(n, n)$ , con $n = 1$ (sólido), $n = 2$ (cortada) y $n = 4$ (punteada). . . . .	33
3.2. Gráficos de las densidades $\Gamma^{-1/2}$ para $\gamma = 1$ y $\alpha \in \{-0,5, -1, -2, -3, -4, -10\}$ (sólida gruesa, sólida, cortada, punteada, punto línea, punto punto línea, respectivamente). . . . .	35
3.3. Gráfico de las densidades de $\Gamma^{-1/2}$ para $\alpha = -1$ y $\gamma \in \{1, 5, 10, 20\}$ (sólida, cortada, punteada, punto línea, respectivamente). . . . .	36
3.4. Gráfico de la varianza de la distribución $\mathcal{G}_A^0(\alpha, 1, 1)$ en función del parámetro $\alpha$ . . . . .	39
3.5. Gráfico de las densidades de la distribución $\mathcal{G}_A^0(\alpha, 1, 1)$ para $\alpha = -1$ (sólida), $\alpha = -4$ (rayada) y $\alpha = -8$ (punteada). . . . .	40
3.6. Gráfico de las densidades de la distribución $\mathcal{G}_A^0(-1, \gamma, 1)$ para $\gamma = 10$ (sólida), $\gamma = 50$ (rayada) y $\gamma = 100$ (punteada). . . . .	41
3.7. Gráfico de las densidades de la distribución $\mathcal{G}_A^0(-1, 1, n)$ para $n = 1$ (sólida), $n = 2$ (rayada) y $n = 10$ (punteada). . . . .	42
3.8. Imagen SAR real con 3 regiones diferentes para las cuales se estimaron los parámetros estadísticos de la distribución $\mathcal{G}_A^0$ . Las regiones indicadas como 1, 2 y 3 corresponden a una zona homogénea, una zona heterogénea y una zona muy heterogénea respectivamente. . . . .	45
3.9. Histogramas para las tres diferentes regiones de la imagen SAR real que se muestra en la Figura 3.8. . . . .	46

3.10. Imagen sintética generada con la distribución $\mathcal{G}_A^0(\alpha, 1, 1)$ , con tres diferentes áreas, correspondientes a los parámetros $\alpha = -2, 0, -3, 5, -4, 0$ para los objetos y $\alpha = -10$ para el fondo. . . . .	48
3.11. Muestras e histogramas de datos generados con distribución $\mathcal{G}^0(\alpha, 1, 1)$ , para $\alpha = -10$ (a y b), $\alpha = -4$ (c y d) y $\alpha = -1, 3$ (e y f). . . . .	52
3.12. Imágenes sintéticas generadas con la distribución $\mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, 1)$ . . . . .	53
3.13. Mapa de los parámetros $\alpha$ y $\gamma$ para una imagen sintética generada con la distribución $\mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, 1)$ con distintos valores de los parámetros. . . . .	54
3.14. Densidad de la distribución $GI(x, \omega, \eta)$ , para $\eta = 1$ y $\omega = 1$ (sólida), $\omega = \sqrt{2}$ (trazos), $\omega = 2$ (puntos), $\omega = 3$ (punto-trazo), $\omega = 4$ (punto-punto-trazo), $\omega = 5$ (sólida) y $\omega = 6$ (trazos). . . . .	55
3.15. Densidad de la distribución $GI(x, \omega, \eta)$ , para $\omega = 1$ y $\eta = 0,5$ (sólida), $\eta = 1$ (trazos), $\eta = 2$ (puntos) y $\eta = 3$ (punto-trazo). . . . .	55
4.1. Ejemplo de un conjunto de puntos de control que generan curvas B-Spline de orden $d = 3$ y $d = 4$ . . . . .	60
4.2. Polígono de control que genera curvas B-Spline para distintos valores del orden $d$ . . . . .	61
4.3. Conjunto de datos que se desea ajustar por una curva B-Spline (*), curva de ajuste (línea sólida), puntos de control ( $\square$ ). . . . .	64
4.4. Conjunto de 27 datos que se desea ajustar por una curva B-Spline (*), curva de ajuste (línea sólida), 12 puntos de control ( $\square$ ). . . . .	65
5.1. Partición de la imagen en bloques cuadrados para estimar los parámetros $\alpha$ y $\gamma$ . . . . .	70
5.2. Zonas de interés especificadas por sus puntos de control, calculadas automáticamente usando el Algoritmo 2. Las líneas gruesas son el polígono de control, las líneas finas son la B-Spline de orden 3 correspondiente. . . . .	71
5.3. Zonas de interés en una imagen real, calculadas automáticamente usando el Algoritmo 2. . . . .	71
5.4. Rectas radiales separadas por un ángulo $\theta_i$ . . . . .	72
5.5. Gráficos que muestran distintas maneras de visualizar la posición del punto de transición sobre una recta. Como el máximo de la función de probabilidad (a), como el punto de discontinuidad en la posición de los datos (b) y como el punto de discontinuidad en el valor del parámetro $\alpha$ (c). . . . .	74
5.6. Ventana rectangular utilizada para estimar los parámetros. . . . .	75
5.7. Esquema que muestra la forma en que se ubica la ventana rectangular en cada paso. Sobre el segmento $s^{(i+1)}$ , el centro de la ventana se ubica a distancia $d_i$ desde el centroide. . . . .	75

5.8.	Desplazamiento de una ventana rectangular sobre un segmento de recta. . . . .	76
5.9.	Resultado de aplicar el algoritmo propuesto a la imagen sintética de la Figura 3.10. . . . .	77
5.10.	Esquema que muestra que el procedimiento puede fallar, dependiendo de la forma del objeto del cual se desea encontrar el contorno. . . . .	78
5.11.	Objeto que tiene en una parte del contorno una gran variación en la curvatura y su contorno detectado. . . . .	79
5.12.	El procedimiento sobre una recta con múltiples cruces, solo detecta el punto de borde marcado con un círculo. . . . .	79
5.13.	Vector de variación entre dos puntos de borde. (Paso 4 del Algoritmo 5) . . . . .	80
5.14.	Resultado de aplicar el Algoritmo 5 a una imagen sintética con tres tipos distintos de inicialización. Las líneas finas corresponden a las regiones iniciales, las líneas gruesas a las curvas de ajuste halladas por el algoritmo. . . . .	80
5.15.	Resultado de aplicar el Algoritmo 5 a la imagen de la Figura 5.11. . . . .	81
5.16.	Resultado de aplicar el algoritmo de velocidad a una imagen sintética correspondiente a un objeto no convexo, con gran variación en la curvatura en todo punto. . . . .	82
5.17.	Resultado de aplicar el algoritmo completo a una Imagen SAR real. Las líneas finas corresponden a la región inicial encontrada automáticamente, las líneas gruesas corresponden a la curva que ajusta el contorno. . . . .	83
5.18.	Resultado de aplicar el algoritmo completo a una Imagen SAR real de 3 looks, de una zona de bosque en Brasil. La curva verde corresponde a la región inicial, la roja a la curva de ajuste. . . . .	84
5.19.	Resultado de aplicar el algoritmo a una imagen real donde el objetivo es una zona homogénea. Las líneas finas son las regiones iniciales, las gruesas corresponden a las líneas de ajuste encontradas por el algoritmo. . . . .	85
6.1.	Gráficos de la función de Lorentz, para $\sigma = \frac{1}{2}$ , 1, 2 y 10 (sólida, raya, punto y raya-punto), respectivamente. . . . .	91
6.2.	Gráficos de la función de Leclerc para valores de $\sigma = 1/2$ , 1, 2 y 10 (solida, raya, punto y raya-punto), respectivamente. . . . .	92
6.3.	Imagen SAR sintética generada con la distribución $\mathcal{G}$ , suavizada con difusión isotrópica para distintos valores de $t$ . . . . .	93
6.4.	Imagen SAR sintética generada con la distribución $\mathcal{G}$ , suavizada con Difusión Anisotrópica para distintos valores de $t$ , en todos los casos se ha utilizado $\sigma = 100$ . . . . .	94
6.5.	Resultado de aplicar el Algoritmo 7 a una imagen SAR sintética. Las líneas finas corresponden a las regiones iniciales y las gruesas corresponden a los contornos encontrados por el método. . . . .	95

6.6.	Resultado de aplicar el Algoritmo 7 a una imagen SAR real. Las líneas finas corresponden a las regiones iniciales y las gruesas corresponden a los contornos hallados por el procedimiento. . . . .	97
7.1.	Partición de la imagen en una grilla con celdas de lado $r$ . . . . .	102
7.2.	Recta de cuadrados mínimos que ajusta los datos de $\log(N_r)$ vs. $\log(\frac{1}{r})$ . . . . .	102
7.3.	Imagen SAR sintética con dos tipos de regiones diferentes, generada con la distribución $\mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, n)$ a la cual se le aplica una clasificación con el clasificador de Bayes y la dimensión <i>box-counting</i> . . . . .	107
7.4.	Partición de la imagen en celdas de lado $s$ y de los niveles de gris en cubos de lado $s$ . . . . .	108
7.5.	Vista de frente de la partición de los niveles de gris en cubos de lado $s$ . . . . .	108
7.6.	Resultado de aplicar el Algoritmo 9 a la imagen sintética de la Figura 7.3(a), utilizando la dimensión <i>box-counting</i> . . . . .	108
7.7.	Imagen sintética generada con la distribución $\mathcal{G}_I^H(\omega, \eta)$ , con parámetros $\omega = 1$ , $\eta = 1$ para el objeto y $\omega = 10$ , $\eta = 1$ para el fondo. . . . .	109
7.8.	Resultado de aplicar el algoritmo de detección de bordes utilizando la dimensión <i>box-counting</i> como descriptor de rugosidad, en la imagen SAR sintética de la Figura 7.7. . . . .	109
7.9.	Resultado de aplicar el algoritmo de detección de bordes utilizando la dimensión <i>box-counting</i> diferencial como descriptor de rugosidad, en la imagen SAR sintética de la Figura 7.7. . . . .	110
7.10.	Resultado de aplicar el algoritmo de detección de bordes utilizando la dimensión <i>box-counting</i> diferencial a la imagen E-SAR real de la Figura 5.17(a). . . . .	110
8.1.	Esquema de una muestra rectangular generada con distribución $\mathcal{G}_A^0(-3, 1, 1)$ a la izquierda y $\mathcal{G}_A^0(-10, 1, 1)$ a la derecha. . . . .	112
8.2.	Conjunto de imágenes sintéticas de prueba, generadas para medir el error que se comete al aplicar los métodos propuestos. Están generadas con distribución $\mathcal{G}_A^0(-3, 1, 1)$ y con distribución $\mathcal{G}_A^0(-10, 1, 1)$ en el interior de la flor y el fondo, respectivamente. . . . .	115
8.3.	Curvas de frecuencias relativas $f_r(k)$ , de que el error sea menor que $k$ pixels, para los métodos MMV (línea llena), MMD (línea punteada) y MDA (línea raya-punto). . . . .	118
8.4.	Curvas de frecuencias relativas $f_r(k)$ , de que el error sea menor que $k$ pixels, para los métodos MMV (línea punteada) y MDF (línea llena). . . . .	119
8.5.	Conjunto de imágenes sintéticas generadas para medir los errores (columna izquierda) y el resultado de aplicar el método MMV para cada una (columna derecha). . . . .	120

8.6.	Conjunto de imágenes sintéticas generadas para medir los errores (columna izquierda) y el resultado de aplicar el método MMV para cada una (columna derecha).	121
8.7.	Histograma de errores correspondiente al método MMV. El eje horizontal corresponde a los valores de error, el eje vertical se refiere a la cantidad de imágenes de prueba que tienen error dentro del intervalo indicado en el eje horizontal.	122
8.8.	Histograma de errores correspondiente al método MDA. El eje horizontal corresponde a los valores de error, el eje vertical se refiere a la cantidad de imágenes de prueba que tienen error dentro del intervalo indicado en el eje horizontal.	122
8.9.	Histograma de errores correspondiente al método MDF. El eje horizontal corresponde a los valores de error, el eje vertical se refiere a la cantidad de imágenes de prueba que tienen error dentro del intervalo indicado en el eje horizontal.	123
8.10.	Histogramas de errores globales para cada método. La línea llena con el signo '•' corresponde al método MMV, la línea punteada con el signo '△', corresponde al método MDA, la línea rayada con el signo '□', corresponde al método MDF.	123
8.11.	Curvas de errores acumulados para cada método. La línea llena corresponde al método MMV, la línea punteada corresponde al método MDA, la línea rayada corresponde al método MDF.	124
9.1.	Imagen SAR polarimétrica con dos diferentes regiones, generada con la distribución $\mathcal{G}^H(\omega, 1, 3)$ polarimétrica, con parámetros $\omega = 3$ para el objeto y $\omega = 10$ para el fondo.	136
9.2.	Imagen SAR polarimétrica sintética con una región inicial especificada por un polígono cuyos vértices generan una curva B-Spline.	137
9.3.	Esquema que muestra la forma de un segmento $s^{(i)}$ sobre una imagen SAR polarimétrica.	137
9.4.	Resultado de aplicar el Algoritmo 13 a la imagen sintética de la Figura 9.1, utilizando la región inicial que se muestra en la Figura 9.2.	139
9.5.	Comportamiento del parámetro $\omega$ sobre un segmento de recta $s^{(i)}$	140
9.6.	Resultado de aplicar el Algoritmo 13 a una imagen real SAR polarimétrica de 3 looks.	141
9.7.	Resultado de aplicar el Algoritmo 13 a una imagen real SAR polarimétrica de 3 looks, con 4 regiones iniciales.	142
9.8.	Gráfico que muestra la curva de frecuencias relativas $f_r(k)$ de que el error sea menor que $k$ pixels ( $k = 0, \dots, 10$ ), con la distribución $\mathcal{G}^H$ polarimétrica.	142
C.1.	Gráfico de la función $B_{0,1}(s)$	153
C.2.	Gráfico de la función $B_{0,2}(s)$	154



C.3. Gráfico de la función $B_{0,2}(s)$ y $B_{1,2}(s)$ . . . . .	154
C.4. Gráfico de la función $B_{0,3}(s)$ y $B_{1,3}(s)$ . . . . .	154
C.5. Gráfico de la función $B_{0,4}(s)$ y $B_{1,4}(s)$ . . . . .	155
C.6. Gráfico de las funciones involucradas en el $\text{span } [3, 4)$ : $B_{1,3}(s)$ , $B_{2,3}(s)$ y $B_{3,3}(s)$ . . . . .	156
C.7. Gráfico de los segmentos polinomiales de las funciones involucradas en el $\text{span } [3, 4)$ : $B_{1,3}(s)$ , $B_{2,3}(s)$ y $B_{3,3}(s)$ . . . . .	157

# Capítulo 1

## Introducción

La tarea de encontrar el contorno de regiones es de suma importancia en el análisis de imágenes porque permite interpretar automáticamente las mismas y solucionar problemas fundamentales en el área de procesamiento de imágenes.

Las imágenes de Radar de Apertura Sintética (SAR, *Synthetic Aperture Radar*) son utilizadas en monitoreo ambiental, conocimiento del ecosistema, detección de manchas de petróleo en el mar, detección de claros en bosques, agricultura y planeamiento urbano entre otras aplicaciones. Este tipo de imágenes poseen un ruido inherente a su proceso de captura y formación, llamado ruido *speckle* el cual es propio de todos los sistemas generadores de imágenes con iluminación coherente, otras imágenes de este tipo son las de ecografía sonar y laser.

El ruido de la imagen es la principal dificultad en los algoritmos de detección de bordes porque muchos de ellos encuentran regiones utilizando extracción local de características, es decir utilizando la información presente en un pixel. En el caso de detección de bordes de objetos en imágenes con ruido *speckle*, no es posible utilizar la información puntual, sino que hay que analizar la imagen a partir de conjuntos de pixels. La segmentación de imágenes SAR es reconocida como un problema de gran complejidad, debido a la presencia del ruido *speckle*. Este ruido es lo que hace que en este tipo de imágenes se vea un granulado, y es la razón por la cual son muy difíciles de analizar e interpretar. Es también la razón por la cual los métodos clásicos de procesamiento de imágenes, como los basados en detección de bordes ([109], [78], [79], [13]), o eliminación de ruido ([118], [1], [4]) resultan ineficientes cuando son aplicados en imágenes SAR.

Por estas razones resulta de gran utilidad el desarrollo de algoritmos automáticos, no supervisados, de análisis, segmentación e interpretación de imágenes SAR.

Diversos autores han estudiado el problema de adaptar los métodos clásicos de procesamiento de imágenes para que puedan ser aplicados a imágenes SAR, utilizando técnicas basadas en detección de bordes ([11], [120], [89]) o filtrado ([116], [36], [70]), con relativo éxito. Estas técnicas tienen en común el análisis de la imagen completa pixel por pixel, lo

que implica un alto costo computacional, teniendo en cuenta las grandes dimensiones que pueden poseer las imágenes SAR.

Por otro lado, los algoritmos de contornos activos y *Snakes* están siendo muy utilizados en los últimos años, por su robustez y tratabilidad. El primer algoritmo de detección de bordes para imágenes ópticas, basado en evolución de curvas por medio de la minimización de la energía y cálculo variacional, fue desarrollado por Kass *et al.* [62]. Consiste en la evolución de una curva dentro de la imagen, hasta ajustar el borde de un objeto. Este método presenta serias limitaciones porque tiene dificultades en la convergencia si el objeto no es convexo, es muy sensible a la ubicación del contorno inicial y no permite cambios en la topología. Se han desarrollado diversas mejoras a este procedimiento que solucionan los problemas planteados, como los métodos de *distance snakes* [19], *balloon snakes* [18], contornos deformables [81] y *gradient vector flow snakes* [127], que resultan muy poco robustos en imágenes con ruido y son muy sensibles a modificaciones en los parámetros, como se muestra en el artículo [25], donde se comparan todos ellos.

En el año 1988 aparecen los primeros métodos de evolución de frentes, desarrollados por Osher y Sethian [92], seguidos por Malladi [74] y más tarde formalizado en [114], [113], [111]. También comienzan los algoritmos de conjuntos de nivel, como [133], [28], [94], [14], [128], [91], [123], [77], o los que utilizan técnicas de morfología [7]. Todos ellos están basados en soluciones de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y resultan mucho más robustos que los anteriores, además permiten cambios en la topología. Pero tienen la dificultad de que son muy sensibles al ruido de la imagen. Estos algoritmos empezaron recientemente a adaptarse para ser aplicados en imágenes SAR para detección de bordes de objetos y manchas de petróleo (ver [2], [3] y [55]). Sin embargo tienen la desventaja de que son muy costosos computacionalmente por la gran complejidad que conllevan.

Otra clase de algoritmos de contornos activos son aquellos basados en regiones. Germain *et al.* presentaron en [43] un algoritmo de este tipo para datos que siguen la ley de probabilidad  $\Gamma$ . En este esquema un contorno es deformado iterativamente para localizar el borde de un objeto, guiado por un criterio estadístico, utilizando la distribución  $\Gamma$  para caracterizar los datos. El problema del método es que la distribución  $\Gamma$  no modela apropiadamente los datos SAR provenientes de regiones muy heterogéneas (ver [84]).

Por otro lado, en esta tesis se utiliza la representación de curvas B-Spline como herramienta fundamental en la descripción de contornos. Este enfoque ha sido utilizado en detección de bordes [17], [56] aproximación de formas [82], [10], [29], [95], [32] y seguimiento de objetos en secuencias de video [12], [9], [64]. El contorno formulado por medio de curvas B-Spline, tiene varias ventajas con respecto a otras representaciones de curvas porque permite control local, requiere pocos parámetros y es una función suave.

En este trabajo proponemos un nuevo método de ajuste de curvas a bordes de objetos o regiones en imágenes con ruido *speckle* que tiene excelentes resultados, con un aceptable costo computacional. Los algoritmos propuestos consideran la imagen por regiones, en

lugar de hacerlo sobre toda la imagen, lo cual es un gran ahorro en tiempo de cómputo. Además provee una fórmula matemática para el contorno que depende de muy pocos parámetros.

El algoritmo comienza con un paso de inicialización, es decir una curva inicial, que se encuentra automáticamente y que tiene el objetivo de que los procedimientos tengan más rápida convergencia y menor costo computacional. Luego, se deforma la curva inicial hasta ajustar el contorno del objeto de interés.

Para hallar los puntos de borde entre las diferentes regiones de la imagen se trabaja sobre la hipótesis de que los datos SAR son modelados con la familia de distribuciones estadísticas  $\mathcal{G}$  bajo el modelo multiplicativo. Esta familia de distribuciones se utiliza para describir los datos de la imagen. Fue propuesta por Frery *et al.* en [40], donde los autores demuestran que esta clase de distribuciones modela los datos con ruido *speckle* mejor que otras distribuciones, especialmente en el caso de áreas extremadamente heterogéneas, como zonas urbanas, para los cuales las distribuciones  $\Gamma$  y  $\mathcal{K}$  no poseen buen comportamiento (ver [61]). En esta tesis se utilizan las distribuciones  $\mathcal{G}^0$  y  $\mathcal{G}^H$  para datos monopolarizados, como fue desarrollado en [84, 85] y la distribución  $\mathcal{G}_P^H$  para datos polarimétricos, desarrollada en [39], [86], [88] y [59]. Bajo el modelo  $\mathcal{G}$ , las regiones de la imagen con distinto grado de homogeneidad quedan caracterizadas por los parámetros de las distribuciones. Con este propósito, se estiman los parámetros correspondientes, a lo largo de segmentos de recta dispuestos en un entorno de la curva inicial. Si un punto pertenece al borde del objeto, entonces en una vecindad de ese punto existe un cambio brusco en los parámetros estadísticos de la distribución que lo modela.

Es importante observar que en esta tesis no se trata de eliminar el ruido *speckle*, sino de aprovechar sus propiedades estadísticas. Para eso es necesario un modelo estadístico que describa los datos, como es la familia de distribuciones  $\mathcal{G}$ .

En la estimación de los parámetros de las distribuciones consideradas se producen errores provenientes de las operaciones o de la estimación y muchas veces es necesario suavizar el arreglo de estimadores para encontrar el punto de discontinuidad con mayor precisión. El método de difusión anisotrópica para eliminación de ruido fue propuesto en [100] y es muy utilizado porque elimina elementos espúreos, preservando bordes y detalles. En este trabajo se aplica el proceso de difusión anisotrópica para suavizar el arreglo de parámetros estimados y encontrar puntos de borde con fidelidad.

También utilizamos otros descriptores de la rugosidad de una zona de la imagen, como la estimación de la dimensión fractal. El análisis de la dimensión fractal se ha utilizado como descriptor, fundamentalmente para la segmentación basada en texturas y rugosidad ([99], [63], [20], [69]) porque describen características de la estructura local de la imagen. En este trabajo utilizamos la dimensión *box-counting* y la dimensión *box-counting* diferencial, como índice de irregularidad de cada región, esto permite realizar comparaciones entre estos valores y hallar puntos de borde entre regiones con diferentes grados de homogeneidad.

Luego de proponer y analizar los diferentes métodos de detección, se evalúan y comparan todos ellos utilizando el método de Monte Carlo. Se estima el error en que se incurre al ajustar una curva al borde de un objeto lo cual permite hacer comparaciones entre los distintos métodos y decidir cuándo es conveniente usar cada uno de ellos.

Las imágenes SAR polarimétricas están dadas en 6 bandas y la enorme cantidad de datos que se deben manejar hace que la tarea de hallar las fronteras entre regiones sea más costosa que para imágenes monopolarizadas. Proponemos también en este trabajo, adaptar los algoritmos anteriores para extracción de contornos en imágenes SAR polarimétricas, utilizando la distribución  $\mathcal{G}_P^H$  para modelar los datos.

Los métodos presentados fueron aplicados con éxito a imágenes sintéticas y reales en numerosas experimentaciones, confirmando su validez y eficiencia.

Esta tesis está compuesta de la siguiente manera: en el capítulo 2 se presenta una breve descripción del Radar de Apertura Sintética, la forma de adquisición de imágenes, el ruido *speckle* y el proceso *multilook*. En el capítulo 3 se describen las distribuciones  $\mathcal{G}$ , el modelo multiplicativo, las distribuciones para el ruido *speckle*, la retrodispersión y el retorno, estimación e interpretación de parámetros y simulación de datos. En el capítulo 4 se introduce la representación de curvas B-Spline. En el capítulo 5 se presentan los algoritmos para encontrar curvas iniciales y los algoritmos desarrollados en este trabajo para detección de bordes en imágenes con ruido *speckle* utilizando el modelo estadístico  $\mathcal{G}_A^0$ . Los métodos de contornos deformables fallan cuando el objeto de interés no es convexo, proponemos entonces un algoritmo que soluciona los problemas que dependen de la forma del objeto. Este capítulo constituye la propuesta más importante de este trabajo. En el capítulo 6 se utiliza un algoritmo de detección de bordes alternativo y la difusión anisotrópica para eliminar el ruido en la estimación de parámetros. En el capítulo 7 se presenta una forma de detección de bordes, utilizando la estimación de la dimensión fractal como descriptor de rugosidad. En el capítulo 8 se muestra una estimación de los errores que se cometen al aplicar los algoritmos descritos en los capítulos 5, 6 y 7, utilizando imágenes de prueba especialmente diseñadas para este propósito. En el capítulo 9 los algoritmos desarrollados son adaptados para utilizarse en imágenes SAR polarimétricas. En todos los casos se presentan los resultados obtenidos en imágenes sintéticas y reales. Finalmente, en el capítulo 10 se extraen conclusiones y se exponen las ideas para trabajos futuros.

## Capítulo 2

# Imágenes de Radar de Apertura Sintética

Las imágenes generadas a partir de datos obtenidos mediante Radar de Apertura Sintética (SAR) proveen valiosa información sobre recursos naturales, permitiendo el monitoreo del medio ambiente y el conocimiento de ecosistemas. A partir de estos datos también es posible evaluar efectos de la acción del hombre tales como deforestación, cultivos y embalses. Las ventajas que poseen este tipo de imágenes sobre las imágenes generadas por sensores ópticos y casi-ópticos convencionales son las siguientes:

1. **Independencia de la luz solar:** el radar de imágenes posee un sistema de iluminación propio que permite la adquisición tanto de día como de noche.
2. **Independencia de las condiciones climáticas:** la radiación electromagnética a las frecuencias de operación de los sistemas SAR atraviesa las nubes sin atenuación, por lo tanto el clima no es una limitación en el proceso de adquisición de imágenes.
3. **Operación en diferentes polarizaciones:** la polarización del radar puede ser horizontal o vertical, como se explica en este capítulo, sección 2.1, esto permite obtener distintos tipos de información sobre una mismo objetivo.

Algunas aplicaciones son:

- Planeamiento y monitoreo agrícola.
- Identificación, mapeo y fiscalización de cultivos agrícolas.
- Detección de claros en zonas de forestación.
- Determinación relativa de la humedad de los suelos; eficiencia de sistemas de irrigación.
- Detección de manchas de petróleo en el mar.

- Detección y seguimiento de icebergs en zonas de tránsito marítimo.
- Topografía del fondo oceánico.
- Climatología.
- Análisis de estructuras geológicas (fracturas, fallas, pliegues y foliaciones).
- Evaluación del potencial de los recursos hídricos superficiales.
- Identificación de áreas para prospección mineral.

Sin embargo las imágenes SAR tienen la desventaja de que poseen un ruido inherente a su proceso de formación, llamado ruido *speckle*, que es un fenómeno aleatorio y que hace que las imágenes SAR sean de difícil interpretación y procesamiento. La dificultad en el procesamiento proviene del hecho de que las características estadísticas de este tipo de ruido hacen que los métodos clásicos de clasificación y restauración utilizados en imágenes provenientes de sensores ópticos y casi-ópticos, no den buenos resultados cuando son aplicados a imágenes SAR.

El radar de imágenes es un dispositivo que mide la respuesta de una superficie de la tierra a la radiación electromagnética. El valor de esta respuesta en cada punto de una zona determinada puede utilizarse para construir una imagen de la zona. En los sistemas SAR, se emite una onda electromagnética en forma de pulsos y el retorno de los mismos es detectado y almacenado para su posterior procesamiento. El sistema emite señales de microondas a intervalos regulares sobre una región y recibe la parte de esta energía que es retrodispersada desde dicha región. Luego detecta y almacena la intensidad y la distancia, es decir el retardo en el tiempo, de las señales de retorno. Muchos autores han estudiado el tema, puede verse por ejemplo [87], [90], [84], [59], [43].

Debido a la manera en que son generadas las imágenes SAR se producen problemas para la visualización y el análisis de los datos adquiridos por este sistema. Esto motiva el desarrollo de algoritmos automáticos o semi automáticos de análisis e interpretación de imágenes SAR.

En este capítulo se presenta una breve descripción del radar de apertura sintética y la forma de adquisición de imágenes, que es el material con el que trabajaremos en toda esta tesis.

Este capítulo está compuesto de la siguiente manera, en la sección 2.1 se introducen algunas nociones sobre el Radar de Apertura Sintética y la adquisición de imágenes SAR con las diferentes polarizaciones. En la sección 2.2 se presenta una explicación sobre el ruido *speckle* y el proceso *multilook* que se utiliza para reducir este ruido. Finalmente en la sección 2.3 se extraen las conclusiones correspondientes.

## 2.1. Adquisición de Imágenes

Los sistemas de Radar (*Radio Detection And Ranging*) son capaces de producir imágenes de la Tierra de alta resolución. Utilizan un dispositivo que detecta un objeto e indica su distancia y su posición. La mayoría de los radares aerotransportados que producen imágenes son de vista lateral (SLAR: *Side Looking Airbone Radar*), dentro de éstos se encuentran dos tipos: radar de apertura real (RAR: *Real Aperture Radar*) y radar de apertura sintética (SAR: *Synthetic Aperture Radar*).

La plataforma que porta al radar se desplaza sobre la tierra. La antena del radar ilumina la superficie de la tierra por medio de la emisión de pulsos de radiación electromagnética. El radar emite los pulsos y recibe la energía reflejada por la tierra, obteniendo el retorno con el que genera la imagen. En la Figura 2.1 puede verse esquemáticamente el radar desplazándose con una velocidad  $\vec{v}$  a una altura  $h$  sobre la tierra. La dirección de avance se denomina “azimuth”, la dirección perpendicular a ésta se denomina “rango” y la dirección perpendicular al plano de tierra, que representa la altura, se denomina “nadir”. El ancho de la zona iluminada se denomina *swath*.  $L_x$  y  $L_y$  son las longitudes de la antena en la dirección de la altura y en la dirección azimuthal, respectivamente. La radiación electro-

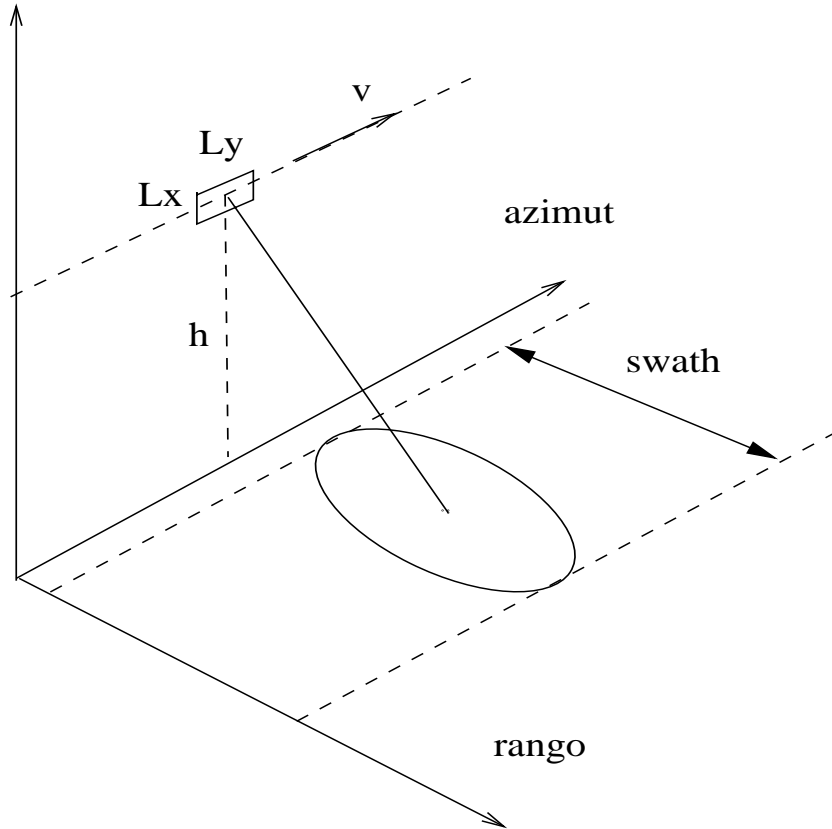


Figura 2.1: Geometría del Radar de Apertura Sintética.

magnética emitida está concentrada principalmente en el cono correspondiente al lóbulo



central del diagrama de radiación de la antena del radar, la cual, en un instante dado, “ilumina” una zona del terreno, representada en la Figura 2.1 por una elipse. Al desplazarse el radar en la dirección indicada, la zona iluminada se desplaza con él, recorriendo una franja de terreno paralela a su trayectoria.

A medida que se desplaza, el radar emite pulsos de radiación electromagnética y recibe la señal correspondiente a la energía retrodispersada por la superficie sensada. Esta señal es luego procesada para generar la imagen.

La antena SAR es de observación lateral para que los retornos provenientes de puntos del terreno con diferente distancia en rango (dirección perpendicular a la dirección de vuelo) lleguen a distintos tiempos. Esto permite distinguirlos y calcular la distancia del punto al radar en la dirección de rango.

El proceso de adquisición de una imagen comienza con la emisión de radiación electromagnética por la antena del radar, en dirección a la superficie terrestre. Cuando la radiación incide sobre la superficie terrestre sufre un proceso de dispersión, el cual resulta en radiación emitida en todas las direcciones. La antena del radar capta una parte de la energía dispersada, llamada energía retrodispersada. El radar registra una señal de retorno diferente para cada tipo de objeto sensado. Es decir, la rugosidad y la geometría del terreno son factores que influyen directamente en la señal de retorno detectada por el sensor.

La ecuación del radar [87] es la relación fundamental entre las características del radar, el blanco y la señal recibida.

$$P_r = \frac{P_t G^2 \lambda^2 \sigma}{(4\pi)^3 R^4}$$

donde  $P_r$ : es la potencia retrodispersada,  $P_t$ : es la potencia emitida por el radar,  $G$ : es la ganancia de la antena,  $\lambda$ : es la longitud de onda,  $R$ : es la distancia entre el sensor y el terreno y  $\sigma$ : es el coeficiente de retrodispersión.

El coeficiente de retrodispersión  $\sigma$ , depende de la rugosidad del material y sus condiciones dieléctricas, las cuales inciden en la intensidad de la señal de retorno (mayor rugosidad implica mayor intensidad de retorno). Por otra parte, la geometría del terreno, pendientes y orientaciones del ángulo de incidencia ejercen un efecto muy importante sobre  $\sigma$  (a mayor ángulo, menor pulso de retorno) [87], [90] y [16]. El coeficiente de retrodispersión está definido como la razón entre la energía que hubiera tenido el sensor si la misma hubiera sido totalmente dispersada en forma isotrópica, llamada  $E_1$  y la energía recibida por el sensor, llamada  $E_2$ . Entonces:

$$\sigma = \frac{E_1}{E_2}$$

Usualmente se expresa el cociente anterior en decibels, por lo que finalmente queda:

$$\sigma^o = 10 \log \frac{E_1}{E_2}$$

El ángulo de incidencia es el ángulo con que la radiación incide sobre la tierra, como se muestra en la Figura 2.2, representado por el ángulo  $\theta$ .

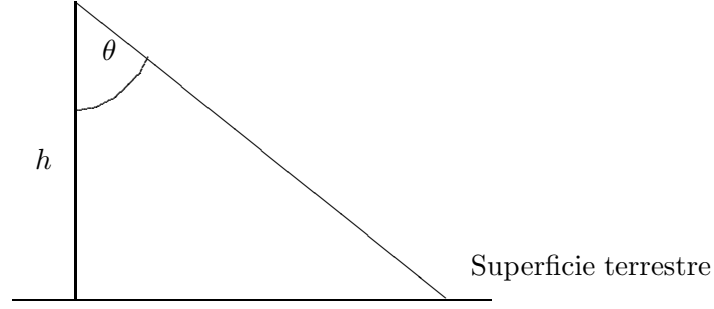


Figura 2.2: Geometría del Radar de Apertura Sintética: corte transversal mostrando el ángulo de incidencia  $\theta$ .

Otro aspecto a tener en cuenta es la polarización, es decir la orientación del campo eléctrico de la radiación transmitida y recibida. La radiación electromagnética posee el vector campo eléctrico  $\vec{\mathbf{E}}$  y el vector campo magnético  $\vec{\mathbf{H}}$  perpendiculares entre sí y perpendiculares a su vez, a la dirección de propagación. En un medio sin cargas eléctricas ni pérdidas, el cociente  $|\vec{\mathbf{E}}|/|\vec{\mathbf{H}}|$  entre los mismos está dada por la impedancia  $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon'}$  (donde  $\varepsilon'$  es la permitividad eléctrica y  $\mu$  es la permeabilidad magnética) del medio en el que la radiación se propaga. La radiación emitida por el radar es linealmente polarizada, y el vector campo eléctrico tiene una dirección que puede ser vertical u horizontal, respecto del plano de la tierra. Si el vector campo eléctrico está en dirección horizontal con respecto al plano de la tierra, se dice que la polarización es horizontal, por el contrario, si está en dirección perpendicular al plano de la tierra se dice que la polarización es vertical.

En la interacción sobre el terreno, la radiación sufre una rotación del vector campo eléctrico y puede resultar que la señal recibida tenga una componente vertical y otra horizontal. Luego existen cuatro combinaciones de polarización de emisión y recepción  $hh$ ,  $hv$ ,  $vh$  y  $vv$ . La primera letra corresponde a la señal emitida y la segunda a la señal recibida. Las combinaciones  $hv$  y  $vh$  pueden considerarse iguales.

Si el campo eléctrico incidente sobre un objeto en el punto  $\vec{P}$  está dado por

$$\vec{\mathbf{E}}^i = \left[ E_v^i \check{\mathbf{v}} + E_h^i \check{\mathbf{h}} \right]^t$$

con  $\check{\mathbf{v}}$  y  $\check{\mathbf{h}}$  versores en la dirección horizontal y vertical, respectivamente, y  $E_v^i$  y  $E_h^i$  los valores complejos que corresponden al campo eléctrico en esas direcciones, entonces el valor del campo dispersado por el objeto en  $\vec{P}$  medido por el radar, el que notaremos

$$\mathbf{E}^s = \left[ E_v^s \check{\mathbf{v}} + E_h^s \check{\mathbf{h}} \right]^t$$

está dado por:

$$\mathbf{E}^s = \begin{bmatrix} E_v^s \\ E_h^s \end{bmatrix} = \frac{e^{ik_0 r}}{r} \begin{bmatrix} S_{vv} & S_{vh} \\ S_{hv} & S_{hh} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_v^i \\ E_h^i \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

donde  $r$  es la distancia entre el punto  $\vec{P}$  y el radar,  $k_0 = 2\pi/\lambda$  es el número de onda, con  $\lambda$  la longitud de onda de la radiación emitida (y de la dispersada también), y  $S_{vv}$ ,  $S_{vh}$ ,  $S_{hv}$ ,  $S_{hh}$  son los valores de la matriz de dispersión  $\mathcal{S}$  dada por

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} S_{vv} & S_{vh} \\ S_{hv} & S_{hh} \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Para los elementos de esta matriz, el segundo subíndice indica la polarización de la onda emitida (o incidente) y el primer subíndice indica la componente del campo eléctrico dispersado detectada por el radar [59]. Entonces, la matriz  $\mathcal{S}$  caracteriza la respuesta del objeto en  $\vec{P}$  en dirección al radar.

Las interferencias constructiva y destructiva de la señal reflejada por el blanco observado dan un retorno que varía en forma aleatoria, y cuya media corresponde a la retrodispersión del blanco iluminado. La retrodispersión es inherente al blanco y es lo que nos interesa interpretar a partir de las observaciones.

En la imagen existen zonas de alta variabilidad de la retrodispersión, como ocurre con las áreas urbanas, en las que los niveles de gris de la imagen están dispersos en un intervalo grande de valores. A este tipo de zonas se las llama muy heterogéneas o muy rugosas. En cambio, si la zona observada posee retrodispersión constante, como las áreas de pastura, los niveles de gris son parecidos entre sí y entonces la zona se denomina homogénea o poco rugosa.

En el proceso de detección, el retorno es demodulado obteniéndose dos magnitudes que son la parte real e imaginaria de los números complejos que constituyen los datos, llamados pulsos crudos. Por lo tanto la señal SAR original es compleja y en la práctica se trabaja con la amplitud (módulo del complejo) o con la intensidad (cuadrado de la amplitud) de esta señal.

El problema de los sensores de apertura real (RAR) radica en su baja resolución espacial como consecuencia del escaso diámetro de la antena, donde el tamaño mínimo del objeto identificable en la imagen está en relación directa con la longitud de onda y la altura de observación y es inversamente proporcional al diámetro de la apertura. En una plataforma espacial, sería imposible lograr una buena resolución con este sistema, dado que sería preciso contar con antenas de enormes proporciones.

El radar de apertura sintética, por el contrario, posee una técnica que permite simular una antena por medio de la sucesión de señales recibidas por una antena real. Esta técnica se basa en el efecto Doppler, que consiste en el cambio de fase de una señal debido a un cambio de distancia, y que afecta a la observación cuando hay un movimiento relativo entre el objeto sensado y el sensor. Entonces, se procesan los pulsos ‘crudos’ obtenidos por el

radar, de manera que la resolución azimutal resulta independiente de la altura. Mediante la apertura sintética, esta resolución depende únicamente de la longitud  $L_y$  (ver Figura 2.1), que corresponde a la longitud de la antena en la dirección azimutal. Esto significa que entre los radares de imágenes, el Radar de Apertura Sintética posee la particularidad de que su resolución espacial en la dirección azimutal no depende de la distancia a la zona sensada, sino que sólo depende de la longitud de la antena y está dada por:

$$\frac{L_y}{2}$$

luego, una antena más corta provee mejor resolución espacial. Por el contrario, en el sistema RAR la resolución está dada por

$$\frac{h\lambda}{L_y \cos \theta}$$

donde  $h$  es la altura de vuelo,  $\lambda$  es la longitud de onda y  $\theta$  el ángulo de incidencia. Esta ecuación muestra que, en el sistema RAR, para mejorar la resolución debe disminuirse la altura del vuelo y aumentarse el tamaño de la antena.

La independencia de la resolución azimutal con respecto a la distancia a la zona sensada, permite la utilización de Radares de Apertura Sintética a bordo de satélites, sin pérdida en la resolución espacial.

La dirección de rango es perpendicular a la dirección azimutal. El rango de un punto sobre la tierra puede medirse como la distancia del mismo a la trayectoria de vuelo (rango oblicuo) o como la proyección de esta distancia sobre la tierra. Si el radar emite pulsos de duración  $\tau$ , la resolución en el rango oblicuo  $\Delta r$  queda determinada por la fórmula:

$$\Delta r = \frac{c\tau}{2} \quad (2.3)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz. La resolución en el rango de tierra es

$$R_r = \frac{\Delta r}{\sin \theta} = \frac{c\tau}{2} \frac{1}{\sin \theta}, \quad (2.4)$$

nótese que la resolución en rango es independiente de la altura  $h$ .

## 2.2. El Ruido *Speckle*

La imagen generada por el sistema SAR es afectada por la interferencia de las señales incidente y reflejada por los dispersores. El ruido *speckle* proviene de la adición coherente de los retornos individuales producido por los elementos presentes en cada celda de resolución. Dentro de cada pixel, existen muchos elementos dispersores. La suma de la respuesta de cada uno de ellos determina el valor de gris del pixel.

Cada una de estas respuestas es una senoidal con amplitud y corrimiento de fase dependientes del elemento retrodispersor y de la distancia del mismo al radar. Así, en un pixel sobre el terreno, los retornos correspondientes a cada uno de los elementos presentes en el suelo se suman con su correspondiente fase. En la Figura 2.3 se ilustra la suma de

los fasores elementales, correspondientes a los fasores individuales y el fador resultante de la adición [87]. El valor de gris del pixel es el módulo del número complejo resultante. La distribución para datos complejos es Gaussiana compleja, con media cero y varianza proporcional a la retrodispersión.

El voltaje del  $i$ -ésimo dispersor se puede expresar como:

$$V_i e^{j(\omega t + \theta_i)} = V_i e^{j\phi_i}$$

donde  $V_i$  es su magnitud y  $\phi_i = \omega t + \theta_i$  es la fase instantánea. De esta manera se puede escribir el voltaje instantáneo de la colección de  $N_s$  dispersores como:

$$V = \sum_{i=1}^{N_s} V_i e^{j\phi_i}$$

y que puede ser expresado en términos de su módulo  $V_e$  y de su fase  $\phi$

$$V = V_e e^{j\phi}$$

Consideramos

$$\begin{aligned} V_x &= V_e \cos \phi = \sum_{i=1}^{N_s} V_i \cos \phi_i \\ V_y &= V_e \sin \phi = \sum_{i=1}^{N_s} V_i \sin \phi_i \end{aligned}$$

La Figura 2.3 muestra también las componentes  $V_x$  y  $V_y$  del fador resultante.

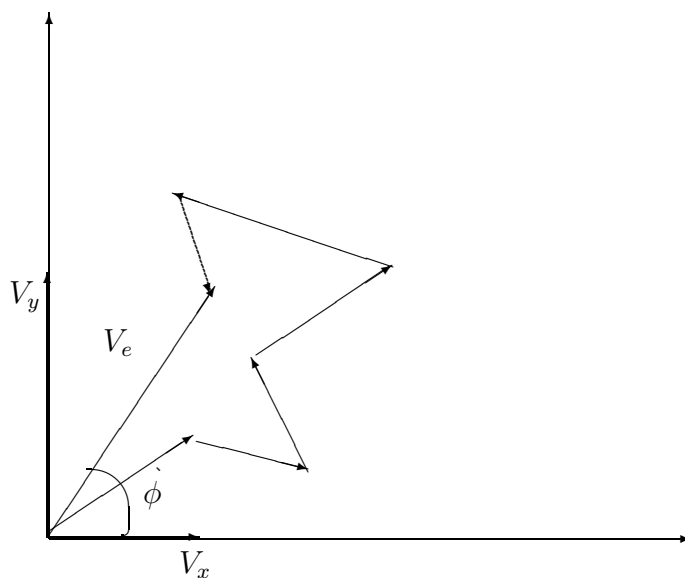


Figura 2.3: Suma de  $N_s$  fasores elementales de módulo y fase aleatorias.

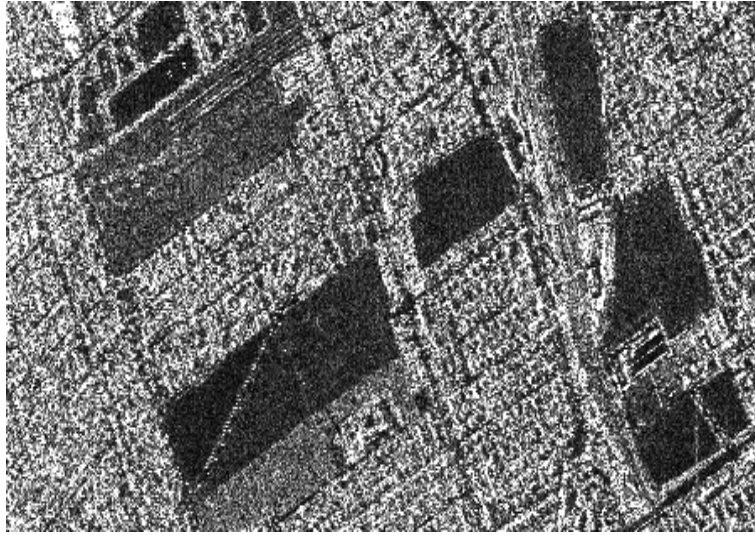


Figura 2.4: Imagen real, obtenida por el sensor E-SAR sobre los alrededores de Munich, Alemania. Se nota el granulado de la imagen producido por el ruido *speckle*.

El ruido *speckle* es lo que hace que en este tipo de imágenes se vea un granulado, como puede verse en la Figura 2.4 y es la razón por la cual son muy difíciles de analizar e interpretar.

Debido a las características del ruido *speckle*, las imágenes SAR no pueden ser analizadas con la información presente en un pixel, sino que es necesario basar este análisis en estimaciones estadísticas sobre un conjunto de píxeles de la imagen. Por lo tanto para poder diseñar algoritmos que extraigan información acerca de las características de la imagen es necesario tener conocimiento sobre las propiedades estadísticas de la misma. Para eso se propone un modelo adecuado y se estiman los parámetros involucrados. Se conoce que el ruido *speckle* no es Gaussiano, como ocurre con el ruido de imágenes ópticas. En este trabajo se utiliza la familia de distribuciones  $\mathcal{G}$  para modelar los datos provenientes de imágenes SAR porque estas distribuciones exhiben muy buenos resultados en áreas con distinto grado de homogeneidad, como se explica en el capítulo 3.

Para reducir el ruido *speckle*, una de las técnicas utilizadas es generar varias “vistas” o *looks* a partir del mismo conjunto de pulsos crudos durante el proceso de generación de la imagen. Esta técnica se denomina *Proceso Multilook*. Consiste en separar la muestra utilizada para la apertura sintética completa en varios subconjuntos adyacentes. Cada uno de estos conjuntos se utiliza para formar una imagen separada llamada *look*. Cada *look* representa una observación independiente de la misma escena. El promediado, pixel a pixel, de cada uno de ellos genera una imagen *multilook* que posee menor ruido *speckle*, sacrificando resolución espacial [90].

Luego, la imagen procesada en  $n$  *looks* es el resultado de realizar un promedio con  $n$  de estas imágenes independientes. Consideramos la coordenada  $(i, j)$ , sobre la cual se observan  $n$  valores complejos  $\{z(1), \dots, z(n)\}$  cada uno de ellos provenientes de un *look* de

la imagen. Entonces la imagen final  $I$ , en la coordenada  $(i, j)$ , está formada por el promedio de los valores de intensidad (ecuación (2.5)). Llamando  $I_k = |z(k)|^2$ ,  $k = 1, \dots, n$

$$I = \frac{I_1 + \dots + I_n}{n} \quad (2.5)$$

Como se ve en el siguiente capítulo el modelo estadístico para el ruido *speckle* depende del número de looks. Si esta información no está disponible, puede aproximarse por el *número equivalente de looks* ( $ENL$ ) que se define como

$$ENL = \frac{m^2}{v} \quad (2.6)$$

donde  $m$  y  $v$  corresponden a la media y a la varianza calculadas con los valores de intensidad de una muestra de pixels sobre un área uniforme de la imagen.

## 2.3. Conclusiones

En este capítulo se enumeran algunos de los ejemplos de aplicación de imágenes SAR como una motivación para el desarrollo de algoritmos de interpretación automática de las mismas.

Se presenta una breve explicación del funcionamiento del radar de imágenes y su geometría que permite entender la forma de adquisición de las mismas y las diferentes polarizaciones. Se explica el significado de zona heterogénea y homogénea. También se da una breve explicación del concepto de retrodispersión, el ruido *speckle* y el proceso *multilook*.

Se observa que los métodos de extracción de características de imágenes en imágenes SAR no son un problema fácil de abordar. En el resto de esta tesis se proponen soluciones al problema de segmentar e interpretar imágenes SAR.

## Capítulo 3

# La familia de distribuciones $\mathcal{G}$ para datos provenientes de imágenes SAR

Los datos provenientes de un sistema de iluminación por radiación coherente, como lo son los datos SAR, pueden modelarse con el modelo multiplicativo. Este esquema es muy conveniente para explicar y analizar las características estadísticas de estos datos. El modelo matemático para el retorno es una variable aleatoria que es el producto de otras dos variables aleatorias independientes que corresponden a la retrodispersión y al ruido *speckle*. De esta forma,

$$Z = X \cdot Y \tag{3.1}$$

modela el retorno  $Z$  bajo el modelo multiplicativo como el resultado del producto de dos variables aleatorias, donde  $Y$  corresponde el ruido *speckle*, inherente a todo sistema de captura de imágenes con iluminación coherente y  $X$  corresponde a la variabilidad de la retrodispersión.

Es posible utilizar diferentes distribuciones para modelar la retrodispersión, dependiendo del grado de homogeneidad presente en la imagen. Como ya se ha mencionado, las áreas urbanas son extremadamente heterogéneas, las áreas de bosque son heterogéneas y las áreas de pastura son homogéneas, y para cada uno de estos tipos de datos habrá una clase de distribuciones que los modela mejor.

Históricamente, las distribuciones  $\mathcal{K}$  [61] han sido utilizadas para modelar datos generados por un sistema de iluminación coherente, en particular para imágenes SAR [90]. Pero en el artículo [40], Frery *et al.* presentan una familia de distribuciones que tiene más generalidad y tratabilidad. Esta familia de distribuciones es estudiada exhaustivamente por Mejail en [84].

El modelo multiplicativo clásico postula que el retorno de áreas no homogéneas obedece un tipo de distribución  $\mathcal{K}$ . En el caso en que el área es homogénea la distribución  $\Gamma^{1/2}$



modela bien los datos y, por ser ésta un caso particular de la anterior, se preserva la validez del modelo  $\mathcal{K}$ . Sin embargo, las distribuciones  $\mathcal{K}$  no modelan bien los datos provenientes de áreas muy heterogéneas.

Frery et al. (ver [40]) propusieron una nueva clase de distribuciones, las distribuciones  $\mathcal{G}$ , que resultan un modelo adecuado para modelar datos provenientes de zonas muy heterogéneas. En ese mismo trabajo se propone el uso de las distribuciones llamadas  $\mathcal{G}^0$  y  $\mathcal{G}^H$  para el modelado de áreas extremadamente heterogéneas, las cuales modelan muy bien datos que provienen de áreas urbanas y que no se pueden modelar con las distribuciones  $\mathcal{K}$ .

En el trabajo de Mejail [84] se estudia y verifica la factibilidad de substituir la distribución  $\mathcal{K}$  por la distribución  $\mathcal{G}^0$  en el modelado y análisis de imágenes SAR. Y en los trabajos [88], [58], [59] los autores estudian las propiedades y la factibilidad de la distribución  $\mathcal{G}^H$ . Los datos provenientes de imágenes SAR pueden estar dados en formato intensidad ( $I$ ) o formato amplitud ( $A$ ), donde  $A^2 = I$ , es decir que la intensidad es el cuadrado de la amplitud.

En este capítulo se presenta el modelo multiplicativo y las distribuciones estadísticas utilizadas a lo largo de este trabajo. Está compuesto de la siguiente manera, en la sección 3.1 se introduce el modelo estadístico para el ruido *speckle*, en la sección 3.2 el modelo para la retrodispersión y en la sección 3.3 el modelo para el retorno. En la sección 3.4 se presenta la distribución  $\mathcal{G}_A^0$ , la estimación de los parámetros, la interpretación de los mismos y el algoritmo para simular imágenes SAR con esta distribución. En la sección 3.5 se presenta la distribución  $\mathcal{G}^H$ . Finalmente, en la sección 3.6 se extraen conclusiones sobre este capítulo.

### 3.1. Modelo Estadístico para el Ruido *Speckle*

El ruido *speckle* complejo, para 1 *look*, se puede modelar adecuadamente con una distribución normal bivariada, cuyas componentes, real e imaginaria, son independientes e idénticamente distribuidas con media 0 y varianza 1/2, denotada por  $\mathcal{N}_C(0, 1/2)$ . Llamando  $Y_C$  a la variable aleatoria correspondiente al *speckle* complejo, se tiene que  $Y_C = (Y_r, Y_i)$ , donde  $Y_r$  e  $Y_i$  son la parte real e imaginaria de  $Y_C$ , respectivamente y

$$Y_C \sim \mathcal{N}_C(0, \frac{1}{2})$$

Para datos de intensidad, el *speckle*  $Y_I$  de  $n$  *looks*, es el promedio sobre  $n$  muestras independientes de  $\|Y_C\|^2$  y por lo tanto resulta que  $Y_I$  está distribuida con la distribución  $\Gamma(n, n)$ .

Para datos de amplitud  $A$ , recordando que  $A^2 = I$ , se tiene que  $Y_A$  está distribuida con la distribución  $\Gamma^{1/2}(n, n)$ .

Entonces

$$Y_I \sim \Gamma(n, n) \quad (3.2)$$

$$Y_A \sim \Gamma^{\frac{1}{2}}(n, n) \quad (3.3)$$

En esta tesis se utilizan los datos en formato amplitud, luego se supone que el ruido *speckle* tiene distribución  $\Gamma^{1/2}(n, n)$ , donde  $n$  es el número equivalente de *looks*. Bajo estas hipótesis, la función de densidad que caracteriza a esta variable aleatoria, para datos de amplitud,  $Y_A$  es

$$f_{Y_A}(y) = \frac{n^n}{\Gamma(n)} y^{2n-1} e^{-ny^2} \quad n, y > 0. \quad (3.4)$$

La Figura 3.1 muestra los gráficos de la densidad de la distribución  $\Gamma^{1/2}(n, n)$  para tres valores distintos de  $n$ . Puede observarse que la densidad es más simétrica cuanto mayor es el número de *looks*. Por esta razón, en algunas aplicaciones prácticas se utiliza la distribución gaussiana para modelar el ruido *speckle* cuando el número de *looks* es grande.

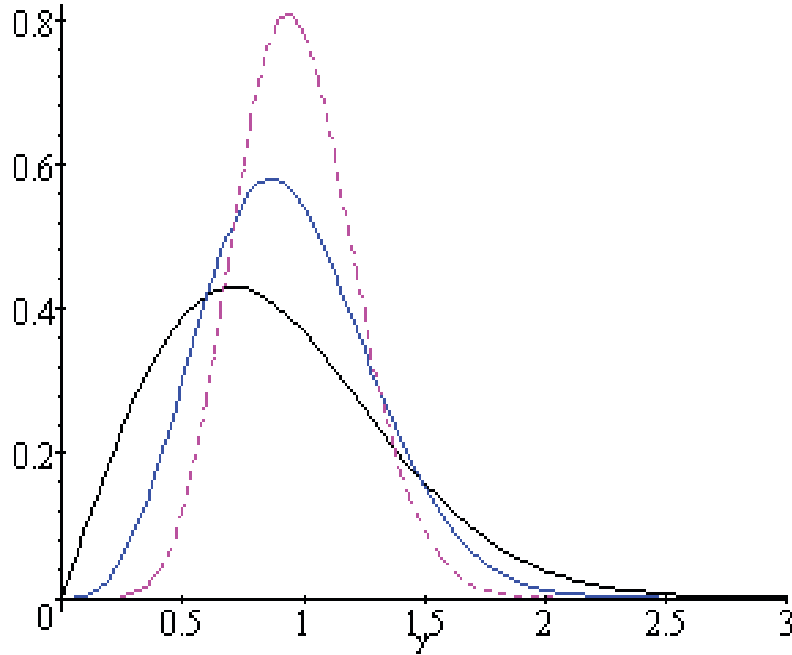


Figura 3.1: Gráficos de la función de densidad  $\Gamma^{1/2}(n, n)$ , con  $n = 1$  (sólido),  $n = 2$  (cortada) y  $n = 4$  (punteada).

En el modelado de imágenes SAR el valor mínimo de  $n$  es 1, que corresponde a imágenes generadas sin realizar el promedio de *looks*. Las imágenes así generadas son más ruidosas

pero poseen mayor información. En este trabajo le daremos mayor énfasis a este caso por ser el que más se desvía de la hipótesis gaussiana. El número  $n$  puede suponerse conocido o ser estimado. En este trabajo lo suponemos conocido.

### 3.2. Modelo estadístico para la retrodispersión

La retrodispersión puede exhibir diferentes grados de homogeneidad y por lo tanto, es posible utilizar diferentes modelos. En general para datos de amplitud, dentro del modelo multiplicativo, se han utilizado dos modelos para la retrodispersión  $X_A$ : uno como una constante  $\mathcal{C}$  (cuando el área es homogénea) y el otro como una variable aleatoria distribuida raíz cuadrada de Gamma,  $\Gamma^{1/2}$  (cuando el área es heterogénea). En [40] se propone modelarla retrodispersión cuando el área es extremadamente heterogénea, como una variable aleatoria distribuida según la recíproca de la raíz cuadrada de Gamma,  $\Gamma^{-1/2}$ . Estas tres situaciones para la retrodispersión quedan unificadas bajo la distribución de la raíz cuadrada de la gaussiana inversa generalizada  $\mathcal{N}^{-1/2}(\alpha, \gamma, \lambda)$ . En el esquema (3.5) se muestran las relaciones entre estas distribuciones, donde  $D$  significa convergencia en distribución y  $\Pr$  convergencia en probabilidad.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \Gamma^{1/2}(\alpha, \lambda) & \xrightarrow{\Pr_{\alpha, \lambda \rightarrow \infty, \alpha/\lambda \rightarrow \beta_1}} & \boxed{\beta_1^{1/2}} \\
 & & \text{Heterogénea} & & \text{Homogénea} \\
 \boxed{\mathcal{N}^{-1/2}(\alpha, \gamma, \lambda)} & \xrightarrow{D_{\gamma \downarrow 0, \alpha, \lambda > 0}} & & & \\
 \text{General} & \xrightarrow{D_{\lambda \downarrow 0, -\alpha, \gamma > 0}} & +\text{Heterogénea} & & \text{Homogénea} \\
 & & \boxed{\Gamma^{-1/2}(\alpha, \gamma)} & \xrightarrow{\Pr_{-\alpha, \gamma \rightarrow \infty, -\alpha/\gamma \rightarrow \beta_2}} & \boxed{\beta_2^{-1/2}}
 \end{array} \tag{3.5}$$

donde  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son constantes, ver apéndice A. La distribución  $\mathcal{N}^{-1/2}(\alpha, \gamma, \lambda)$  es entonces propuesta como un modelo general para modelar la retrodispersión, para datos de amplitud.

Si una variable aleatoria  $X$  tiene distribución Gaussiana Inversa Generalizada  $X \sim \mathcal{N}^{-1}(\alpha, \gamma, \lambda)$ , entonces su función de densidad está dada por

$$f_X(x) = \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{\alpha/2} \frac{1}{2K_\alpha(\sqrt{\gamma\lambda})} x^{\alpha-1} e^{-\frac{1}{2}(\gamma x^{-1} + \lambda x)}, \quad x > 0 \tag{3.6}$$

y el espacio de parámetros viene dado por:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \gamma > 0 & \text{y} & \lambda \geq 0 \quad \text{si} \quad \alpha < 0 \\ \gamma > 0 & \text{y} & \lambda > 0 \quad \text{si} \quad \alpha = 0 \\ \gamma \geq 0 & \text{y} & \lambda > 0 \quad \text{si} \quad \alpha > 0 \end{array} \right. \tag{3.7}$$

y la constante normalizadora  $K_\alpha$  es la función de Bessel modificada de tercera especie y orden  $\alpha$ , dada por:

$$K_\alpha(\sqrt{ab}) = \left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha/2} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{1}{2}(ax + bx^{-1})\right) dx.$$

Si una variable aleatoria  $X$  tiene distribución raíz cuadrada de la Gaussiana Inversa Generalizada  $X \sim \mathcal{N}^{-1/2}(\alpha, \gamma, \lambda)$ , entonces su función de densidad está dada por

$$f_X(x) = \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{\alpha/2} \frac{1}{K_\alpha(\sqrt{\gamma\lambda})} x^{2\alpha-1} e^{-\frac{1}{2}(\gamma x^{-2} + \lambda x^2)}, \quad x > 0 \quad (3.8)$$

con el mismo espacio de parámetros que se muestran en las ecuaciones 3.7.

En esta tesis se utiliza la distribución recíproca de la raíz cuadrada de Gamma para modelar las variables aleatorias correspondientes a la retrodispersión. Esta distribución se obtiene a partir de la distribución  $\mathcal{N}^{-1/2}(\alpha, \gamma, \lambda)$ , restringiendo el espacio paramétrico. Una variable aleatoria  $X$  está distribuida recíproca de la raíz cuadrada de Gamma,  $X \sim \Gamma^{-1/2}(\alpha, \gamma)$  si su función de densidad es

$$f_X(x) = \frac{2}{\gamma^\alpha \Gamma(-\alpha)} x^{2\alpha-1} e^{-\gamma x^{-2}}, \quad \text{para } x > 0, -\alpha, \gamma > 0 \quad (3.9)$$

La Figura 3.2 muestra como varía la densidad de la distribución  $\Gamma^{-1/2}$  de acuerdo a los valores de los parámetros, para los valores  $\gamma = 1$   $\alpha \in \{-0,5, -1, -2, -3, -4, -10\}$ . Se observa que cuando los valores de  $\alpha$  se acercan a cero, la curva se aplana, esto quiere decir que aumenta la varianza, cuando aumenta  $\alpha$ . Por eso es que esta distribución es muy útil para modelar datos muy dispersos, como es el caso de las zonas muy heterogéneas en imágenes SAR, es decir los datos provenientes de áreas urbanas.

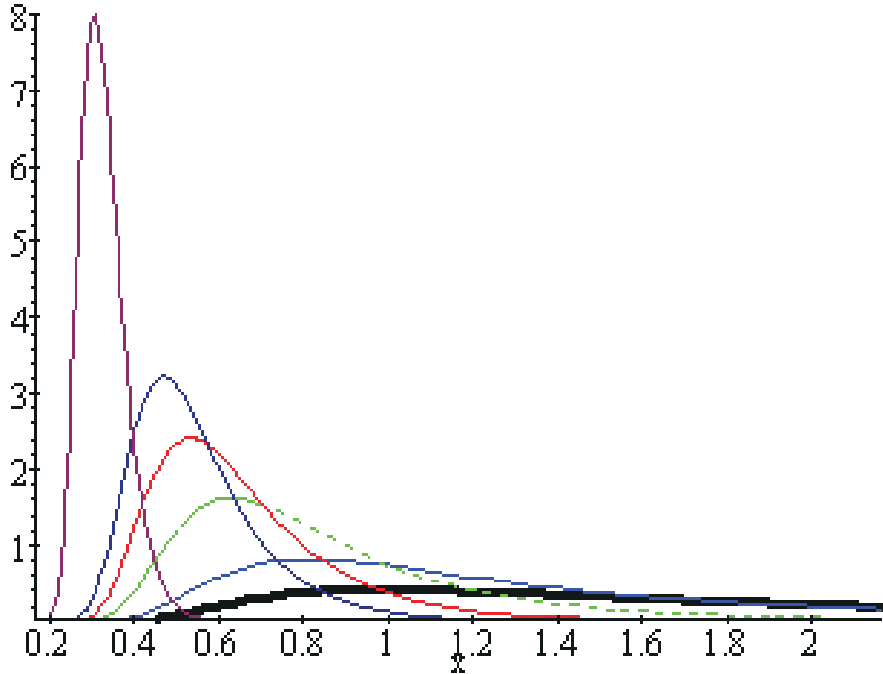


Figura 3.2: Gráficos de las densidades  $\Gamma^{-1/2}$  para  $\gamma = 1$  y  $\alpha \in \{-0,5, -1, -2, -3, -4, -10\}$  (sólida gruesa, sólida, cortada, punteada, punto línea, punto punto línea, respectivamente).

La Figura 3.3 muestra las densidades de la distribución  $\Gamma^{-1/2}$  para los parámetros  $\alpha = -1$  y  $\gamma \in \{1, 5, 10, 20\}$ . Puede observarse que a medida que el parámetro  $\gamma$  aumenta, crece la media de la densidad, mientras que la forma asimétrica no varía.

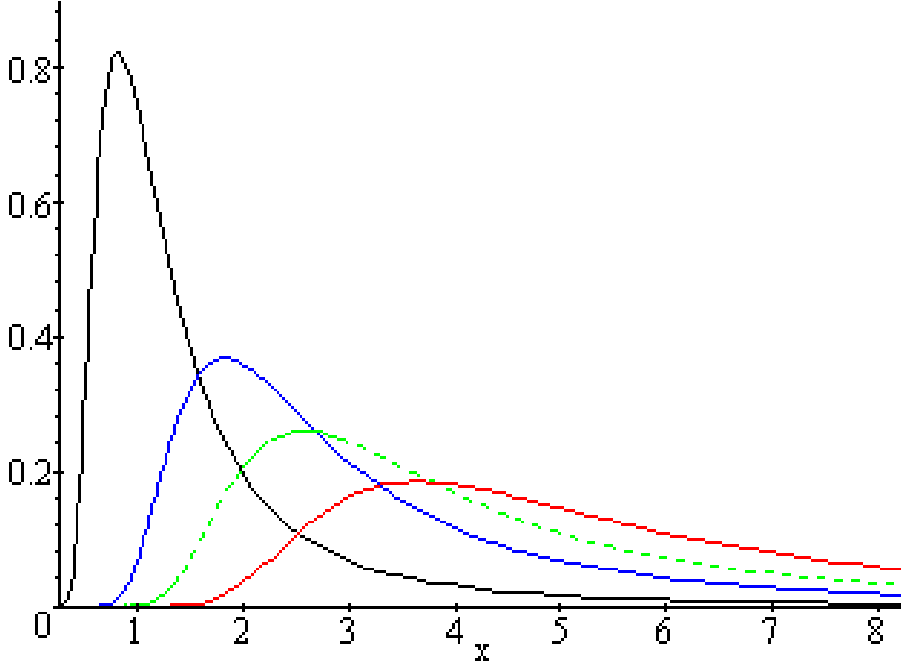


Figura 3.3: Gráfico de las densidades de  $\Gamma^{-1/2}$  para  $\alpha = -1$  y  $\gamma \in \{1, 5, 10, 20\}$  (sólida, cortada, punteada, punto línea, respectivamente).

### 3.3. Modelo estadístico para el Retorno

Bajo el modelo multiplicativo, el retorno para datos de amplitud  $Z_A$  es una variable aleatoria que resulta del producto de dos variables independientes: la retrodispersión  $X_A$  y el *speckle*  $Y_A$ . Por lo tanto el retorno, como variable aleatoria tiene una distribución que depende del modelo elegido para la retrodispersión y para el ruido *speckle*.

Bajo el modelo  $Z_A = X_A \cdot Y_A$  con  $Y_A \sim \Gamma^{1/2}(n, n)$ , la clase de distribuciones  $\mathcal{G}$  modelan el retorno  $Z_A$  cuando la retrodispersión tiene distribución  $\mathcal{N}^{-1/2}$ . Con este modelo de retrodispersión, es posible obtener fórmulas cerradas para las densidades del retorno bajo el modelo multiplicativo, con los siguientes casos particulares:

- Si  $X_A \sim \Gamma^{1/2}(\alpha, \lambda)$ , entonces el retorno tiene distribución perteneciente a la clase de distribuciones  $\mathcal{K}$ , es decir  $Z_A \sim \mathcal{K}(\alpha, \lambda)$ .
- Si  $X_A \sim \Gamma^{-1/2}(-\alpha, \gamma)$ , entonces el retorno tiene distribución perteneciente a la clase de distribuciones  $\mathcal{G}^0$ , es decir  $Z_A \sim \mathcal{G}^0(-\alpha, \gamma)$ , ver sección 3.4.

- Si  $X_A$  tiene distribución constante  $\mathcal{C}$ , entonces el retorno es *speckle* escalado, en el sentido de que resulta la multiplicación de la variable aleatoria  $Y_A$  multiplicada por un escalar.

Se puede ver en el esquema (3.10) las relaciones, con respecto a la convergencia, entre las distribuciones propuestas para modelar el retorno ( $D$  es la convergencia en distribución).

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \boxed{\mathcal{K}_A(\alpha_K, \lambda, n)} & \xrightarrow{D_{\alpha, \lambda \rightarrow \infty, \alpha/\lambda \rightarrow \beta_1}} & \boxed{\Gamma^{1/2}(n, n/\beta_1)} \\
 & \xrightarrow{D_{\gamma \downarrow 0, \alpha, \lambda > 0}} & \text{Heterogéneos} & & \text{Homogéneos} \\
 \boxed{\mathcal{G}_A(\alpha, \gamma, \lambda, n)} & & & & \\
 \text{General} & \xrightarrow{D_{\lambda \downarrow 0, -\alpha, \gamma > 0}} & +\text{Heterogéneos} & & \\
 & & \boxed{\mathcal{G}_A^0(\alpha_G, \gamma, n)} & \xrightarrow{D_{-\alpha, \gamma \rightarrow \infty, -\alpha/\gamma \rightarrow \beta_2}} & \boxed{\Gamma^{1/2}(n, n\beta_2)} \\
 & & & & (3.10)
 \end{array}$$

La clase de distribuciones  $\mathcal{G}^0$  permite el modelado, no solamente de áreas homogéneas y heterogéneas sino de áreas extremadamente heterogéneas a diferencia de las distribuciones  $\mathcal{K}$  que no ajustan bien este tipo de datos. Las distribuciones  $\mathcal{G}^0$  tiene tantos parámetros como las distribuciones  $\mathcal{K}$  y además sus funciones de densidad y distribución acumulada son más tratables teórica y computacionalmente.

En el esquema (3.11) se muestra el retorno  $Z_A$  como resultado del producto del *speckle*  $Y_A$  con distribución raíz cuadrada de Gamma, con las diferentes opciones que toma la retrodispersión  $X_A$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 X_A & \times & Y_A & = & Z_A \\
 \boxed{\mathcal{N}^{-1/2}(\alpha, \gamma, \lambda)} & & \boxed{\Gamma^{1/2}(n, n)} & & \boxed{\mathcal{G}_A(\alpha, \gamma, \lambda, n)} \\
 \swarrow & & \searrow & & \swarrow \quad \searrow \\
 \boxed{\Gamma^{-1/2}(-\alpha, \gamma)} & & \boxed{\Gamma^{1/2}(\alpha, \lambda)} & & \boxed{\mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, n)} \quad \boxed{\mathcal{K}_A(\lambda, \gamma, n)} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \\
 \boxed{\mathcal{C}(\beta_2^{-1/2})} & & \boxed{\mathcal{C}(\beta_1^{1/2})} & & \boxed{\Gamma^{1/2}(n, n\beta_2)} \quad \boxed{\Gamma^{1/2}(n, \frac{n}{\beta_1})} \\
 & & & & (3.11)
 \end{array}$$

El caso particular  $n = 1$  y  $X_A \sim \mathcal{C}(\beta)$ , resulta el retorno con distribución  $\Gamma^{1/2}(1, 1/\beta)$  también llamada distribución de Rayleigh, que fue tratada extensamente en [38] y [41].

### 3.4. La distribución $\mathcal{G}_A^0$

Para valores particulares de los parámetros de la distribución  $\mathcal{N}^{-1/2}$ , se obtienen la distribución  $\Gamma^{1/2}(\alpha, \lambda)$ , y la distribución  $\Gamma^{-1/2}(\alpha, \gamma)$  como muestra el esquema 3.5.

La distribución  $\mathcal{G}_A^0$  representa una elección muy atractiva para modelado de datos con ruido *speckle*, por su fácil tratabilidad matemática (ver [105]) y porque modela muy bien los datos provenientes de cualquier tipo de áreas. Si una variable aleatoria  $Z_A$  tiene distribución  $\mathcal{G}_A^0$ , es decir  $Z_A \sim \mathcal{G}_A^0$ , entonces su función de densidad está dada por

$$f_{Z_A}(z) = \frac{2n^n \Gamma(n - \alpha)}{\gamma^\alpha \Gamma(-\alpha) \Gamma(n)} \frac{z^{2n-1}}{(\gamma + z^2 n)^{n-\alpha}}, \quad -\alpha, \gamma, z > 0, n \geq 1, \quad (3.12)$$

y su función de distribución acumulada es

$$F_{Z_A}(z) = \frac{n^{n-1} \Gamma(n - \alpha) z^{2n}}{\gamma^n \Gamma(-\alpha) \Gamma(n)} H(n, n - \alpha; n + 1; \frac{-nz^2}{\gamma}) \quad -\alpha, \gamma, z > 0, n \geq 1, \quad (3.13)$$

donde  $H$  es la función hipergeométrica definida por:

$$H(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)z^k}{\Gamma(c+k)k!}. \quad (3.14)$$

Los momentos de orden  $r$ , que utilizamos en esta tesis para estimar los parámetros, están dados por:

$$E_{\mathcal{G}_A^0}(Z^r) = \left(\frac{\gamma}{2n}\right)^{r/2} \frac{\Gamma(-\alpha - r/2)}{\Gamma(-\alpha)} \frac{\Gamma(n + r/2)}{\Gamma(n)}, \quad -\alpha > r. \quad (3.15)$$

La varianza de la distribución  $\mathcal{G}_A^0$  es:

$$\sigma^2 = \frac{\gamma(n\Gamma^2(n)(-\alpha - 1)\Gamma^2(-\alpha - 1) - \Gamma^2(n + 1/2)\Gamma^2(-\alpha - 1/2))}{n\Gamma^2(n)\Gamma^2(-\alpha)}, \quad \text{para } -\alpha > 1, \gamma, n > 0 \quad (3.16)$$

La Figura 3.4 muestra el gráfico de la varianza de la distribución  $\mathcal{G}_A^0(\alpha, 1, 1)$  en función del parámetro  $\alpha$ . Puede verse que la varianza es una función creciente de  $\alpha$ . Esto implica que a medida que el parámetro  $\alpha$  se acerca a cero, la varianza aumenta y por lo tanto corresponde a zonas muy heterogéneas. Además, se observa en la fórmula 3.16 que la varianza depende linealmente del parámetro  $\gamma$ .

La Figura 3.5 muestra la variación de la densidad de la distribución  $\mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, n)$ , con respecto al parámetro  $\alpha$ , dejando los parámetros  $\gamma = 1$  y  $n = 1$  fijos. Se observa que cuando  $\alpha$  toma valores cercanos a cero, la varianza crece. La Figura 3.6 muestra la variación de la densidad de la distribución  $\mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, n)$ , con respecto al parámetro  $\gamma$ , dejando los parámetros  $\alpha = -1$  y  $n = 1$  fijos. Se observa que cuando  $\gamma$  crece, la varianza aumenta. La

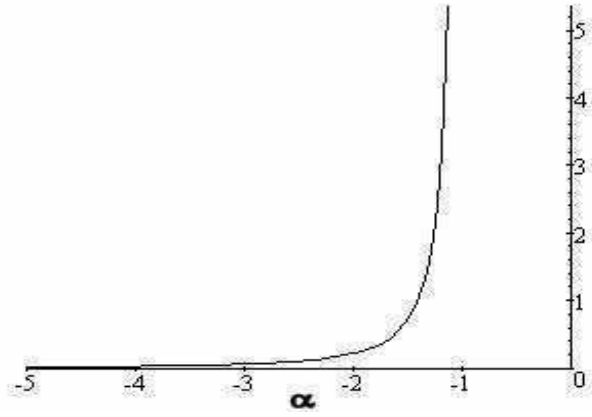


Figura 3.4: Gráfico de la varianza de la distribución  $\mathcal{G}_A^0(\alpha, 1, 1)$  en función del parámetro  $\alpha$ .

Figura 3.7 muestra la variación de la densidad de la distribución  $\mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, n)$ , con respecto al parámetro  $n$ , dejando los parámetros  $\alpha = -1$  y  $\gamma = 1$  fijos. Se observa que cuando  $n$  aumenta la distribución tiene un gráfico más parecido a la distribución gaussiana.

### 3.4.1. Estimación de parámetros

Con el objetivo de interpretar las imágenes SAR, se modelan los datos de manera que se pueda caracterizar las diferentes regiones de la imagen con los parámetros de la distribución. Como se muestra en la sección anterior y se explica en detalle en la sección 3.4.2, la variación de los parámetros involucrados en el modelo, nos indica diferentes clases de datos presentes en la imagen. Entonces se estima el valor de los parámetros para las distintas zonas de la imagen para extraer información a partir de los mismos.

Existen diversas técnicas de estimación de parámetros de distribución para imágenes SAR, puede verse [84], [39], [115], [122]. Las más utilizadas son los métodos de máxima verosimilitud (MV), los métodos basados en los momentos muestrales (MO) y en estadísticos de orden (ver [86], [85], [83]). En esta sección se presentan los estimadores para los parámetros de la distribución  $\mathcal{G}_A^0$ , suponiendo  $n$ , el número de *looks* conocido y utilizando los momentos de orden 1/2, 1 y 2 llamados  $m_{1/2}$ ,  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente, para estimar conjuntamente los parámetros  $\alpha$  y  $\gamma$  de la distribución.

#### Estimación por el método de los momentos

Sea  $(Z_1, Z_2, \dots, Z_N)$  un vector de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con distribución  $F$ . Sea  $f$  una función real definida sobre  $\mathbb{R}$  tal que  $E(|f(Z)|) < \infty$ . Entonces  $E(|f(Z)|)$  puede ser estimada como

$$m_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(z_i) \quad (3.17)$$



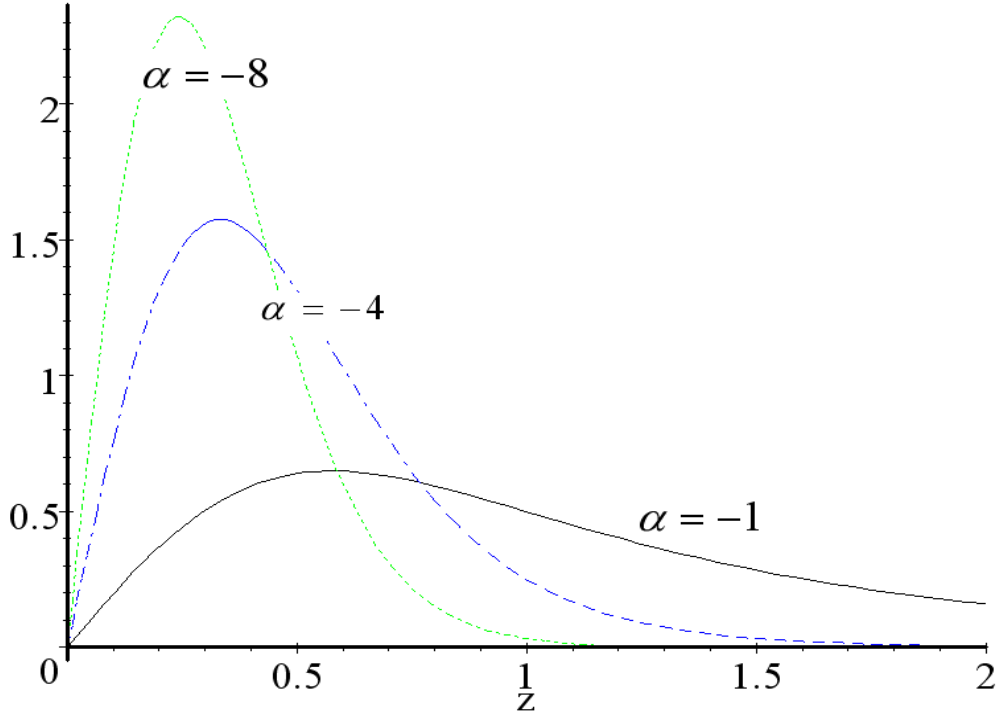


Figura 3.5: Gráfico de las densidades de la distribución  $\mathcal{G}_A^0(\alpha, 1, 1)$  para  $\alpha = -1$  (sólida),  $\alpha = -4$  (rayada) y  $\alpha = -8$  (punteada).

En la ecuación (3.17), si la función  $f$  es la que hace corresponder  $z \mapsto z^r$  con  $r > 0$ , entonces escribimos  $m_r$  en lugar de  $m_{z^r}$ . Los estimadores de los parámetros  $\theta_1, \dots, \theta_t$  son las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \mathbb{E}(Z_1)(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_t) &= m_1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbb{E}(Z_1^t)(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_t) &= m_t \end{cases}$$

### Estimación conjunta de los parámetros $\alpha$ y $\gamma$ por el método de los momentos

Para estimar conjuntamente los parámetros  $\alpha$  y  $\gamma$ , utilizamos los momentos de orden 1 y 2 y también los momentos de orden 1 y  $1/2$ . En ambos casos se plantea un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas,  $\hat{\alpha}$  y  $\hat{\gamma}$ , que son los valores estimados de los parámetros  $\alpha$  y  $\gamma$  respectivamente.

$$m_1 = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} z_i \text{ y } m_2 = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} z_i^2$$

donde  $z_i$ ,  $0 \leq i \leq M$ , es una realización de un vector aleatorio de dimensión  $M$ , cuyas componentes están distribuidas con distribución  $\mathcal{G}_A^0$ .

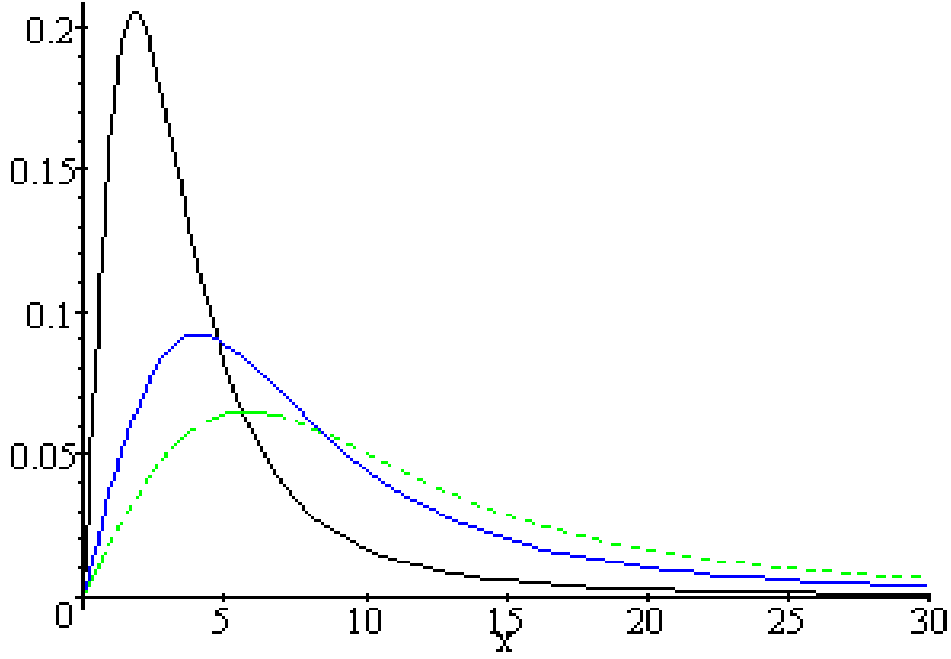


Figura 3.6: Gráfico de las densidades de la distribución  $\mathcal{G}_A^0(-1, \gamma, 1)$  para  $\gamma = 10$  (sólida),  $\gamma = 50$  (rayada) y  $\gamma = 100$  (punteada).

**1. Estimación de los parámetros  $\alpha$  y  $\gamma$  utilizando los estimadores de los momentos de primer y segundo orden,  $m_1$  y  $m_2$**

De la ecuación. (3.15), estos momentos están dados por

$$m_1 = \left(\frac{\hat{\gamma}}{n}\right)^{1/2} \frac{\Gamma(-\hat{\alpha} - 1/2)\Gamma(n + 1/2)}{\Gamma(-\hat{\alpha})\Gamma(n)}, \quad \hat{\alpha} < -1/2 \quad (3.18)$$

$$m_2 = \frac{\hat{\gamma}}{n} \frac{\Gamma(-\hat{\alpha} - 1)\Gamma(n + 1)}{\Gamma(-\hat{\alpha})\Gamma(n)}, \quad \hat{\alpha} < -1 \quad (3.19)$$

Despejando  $\hat{\gamma}$  de ambas ecuaciones, se tiene

$$\hat{\gamma} = n \left( \frac{m_1 \Gamma(\hat{\alpha}) \Gamma(n)}{\Gamma(-\hat{\alpha} - \frac{1}{2}) \Gamma(n + \frac{1}{2})} \right)^2 \quad (3.20)$$

$$\hat{\gamma} = -(\hat{\alpha} + 1)m_2 \quad (3.21)$$

e igualando se obtiene:

$$-(\hat{\alpha} + 1)m_2 = n \left( \frac{m_1 \Gamma(-\hat{\alpha}) \Gamma(n)}{\Gamma(-\hat{\alpha} - \frac{1}{2}) \Gamma(n + \frac{1}{2})} \right) \quad (3.22)$$

Por lo tanto, se tiene una función que depende de  $\hat{\alpha}$  y que está igualada a una función que depende del valor de  $n$  y de los momentos  $m_1$  y  $m_2$ . Entonces, el estimador del parámetro  $\alpha$  se encuentra resolviendo numéricamente la ecuación:

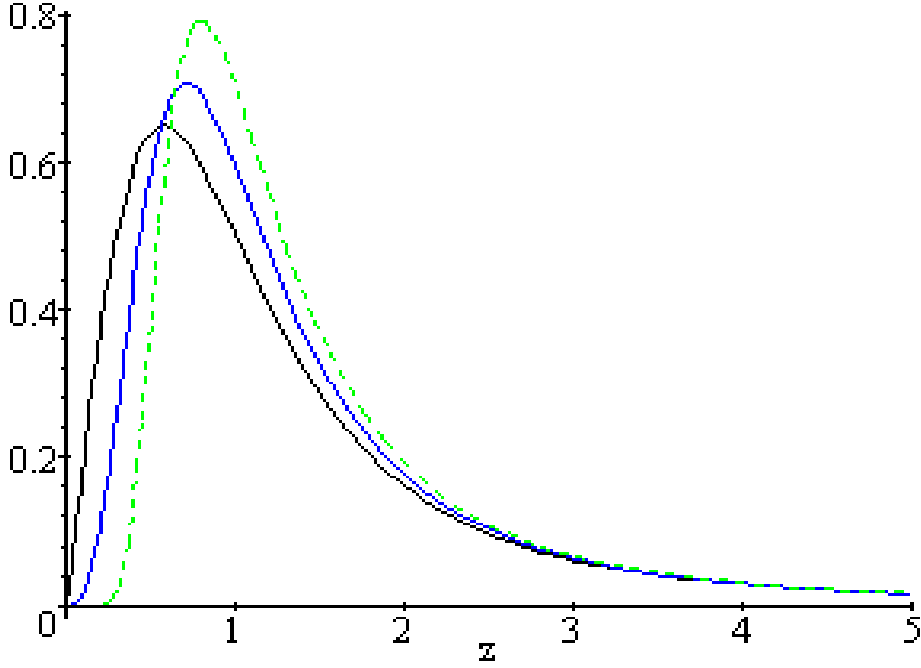


Figura 3.7: Gráfico de las densidades de la distribución  $\mathcal{G}_A^0(-1, 1, n)$  para  $n = 1$  (sólida),  $n = 2$  (rayada) y  $n = 10$  (punteada).

$$-(\hat{\alpha} + 1) \left( \frac{\Gamma(-\hat{\alpha} - \frac{1}{2})}{\Gamma(-\hat{\alpha})} \right)^2 = \frac{n}{m_2} \left( \frac{m_1 \Gamma(n)}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} \right)^2 \quad (3.23)$$

es decir que se trata de hallar una solución de la ecuación (3.24)

$$f(\hat{\alpha}_{m_1 m_2}) - \tau = 0 \quad (3.24)$$

con

$$f(\hat{\alpha}_{m_1 m_2}) = -(\hat{\alpha}_{m_1 m_2} + 1) \left( \frac{\Gamma(-\hat{\alpha}_{m_1 m_2} - \frac{1}{2})}{\Gamma(-\hat{\alpha}_{m_1 m_2})} \right)^2$$

y

$$\tau = \frac{m_1^2}{m_2} \frac{n \Gamma^2(n)}{\Gamma^2(n + \frac{1}{2})} \quad (3.25)$$

## 2. Estimación de los parámetros $\alpha$ y $\gamma$ utilizando los estimadores de los momentos de primer orden y de orden $1/2$

Sean  $m_1$  y  $m_{1/2}$  los estimadores de los momentos de orden 1 y  $1/2$ , respectivamente, definidos como

$$m_1 = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} z_i \text{ y } m_{1/2} = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} z_i^{1/2}$$

donde  $z_i$ ,  $0 \leq i \leq M$ , es una realización de un vector aleatorio de dimensión  $M$ , cuyas componentes están distribuidas  $\mathcal{G}_A^0$ .

De la ecuación (3.15), estos momentos están dados por

$$m_1 = \left(\frac{\hat{\gamma}}{n}\right)^{1/2} \frac{\Gamma(-\hat{\alpha} - 1/2)\Gamma(n + 1/2)}{\Gamma(-\hat{\alpha})\Gamma(n)}, \quad \hat{\alpha} < -1/2 \quad (3.26)$$

$$m_{1/2} = \left(\frac{\hat{\gamma}}{n}\right)^{1/4} \frac{\Gamma(-\hat{\alpha} - 1/4)\Gamma(n + 1/4)}{\Gamma(-\hat{\alpha})\Gamma(n)}, \quad \hat{\alpha} < -1/4 \quad (3.27)$$

Resolviendo en forma análoga al caso anterior, obtenemos

$$\left(\frac{\hat{\gamma}}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(-\hat{\alpha} - \frac{1}{2})\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\Gamma(-\hat{\alpha})\Gamma(n)} \frac{1}{m_1} = \left(\frac{\hat{\gamma}}{n}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{\Gamma(-\hat{\alpha} - \frac{1}{4})\Gamma(n + \frac{1}{4})}{\Gamma(-\hat{\alpha})\Gamma(n)} \frac{1}{m_{1/2}}$$

y despejando  $\hat{\gamma}$

$$\hat{\gamma} = n \left( \frac{\Gamma(-\hat{\alpha} - \frac{1}{4})\Gamma(n + \frac{1}{4})}{\Gamma(-\hat{\alpha} - \frac{1}{2})\Gamma(n + \frac{1}{2})} \frac{m_1}{m_{1/2}} \right)^4 \quad (3.28)$$

substituyendo en la ecuación (3.27),

$$\begin{aligned} m_{1/2} &= \frac{m_1}{m_{1/2}} \frac{\Gamma(-\hat{\alpha} - \frac{1}{4})\Gamma(n + \frac{1}{4})}{\Gamma(-\hat{\alpha} - \frac{1}{2})\Gamma(n + \frac{1}{2})} \frac{\Gamma(-\hat{\alpha} - \frac{1}{4})\Gamma(n + \frac{1}{4})}{\Gamma(-\hat{\alpha})\Gamma(n)} = \\ &= \frac{m_1}{m_{1/2}} \frac{(\Gamma(-\hat{\alpha} - \frac{1}{4})\Gamma(n + \frac{1}{4}))^2}{\Gamma(-\hat{\alpha} - \frac{1}{2})\Gamma(n + \frac{1}{2})\Gamma(-\hat{\alpha})\Gamma(n)} \end{aligned}$$

luego se tiene:

$$m_{1/2}^2 = m_1 \frac{(\Gamma(-\hat{\alpha} - \frac{1}{4})\Gamma(n + \frac{1}{4}))^2}{\Gamma(-\hat{\alpha} - \frac{1}{2})\Gamma(n + \frac{1}{2})\Gamma(-\hat{\alpha})\Gamma(n)}$$

Es decir, que se debe hallar los valores de  $\hat{\alpha}$  tal que:

$$\frac{\Gamma^2(-\hat{\alpha} - \frac{1}{4})}{\Gamma(-\hat{\alpha})\Gamma(-\hat{\alpha} - \frac{1}{2})} = \frac{m_{1/2}^2}{m_1} \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})\Gamma(n)}{\Gamma^2(n + \frac{1}{4})}, \quad \hat{\alpha} < -1/2 \quad (3.29)$$

Entonces,  $\hat{\alpha}$  se calcula como la solución de la siguiente ecuación:

$$g(\hat{\alpha}) - \zeta = 0, \quad (3.30)$$

donde

$$g(\hat{\alpha}) = \frac{\Gamma^2(-\hat{\alpha} - \frac{1}{4})}{\Gamma(-\hat{\alpha})\Gamma(-\hat{\alpha} - \frac{1}{2})} \quad (3.31)$$

y

$$\zeta = \frac{\hat{m}_{1/2}^2}{\hat{m}_1} \frac{\Gamma(n)\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\Gamma^2(n + \frac{1}{4})}, \quad (3.32)$$

luego, sustituyendo el valor de  $\hat{\alpha}$  en la ecuación (3.26) se encuentra el valor de  $\hat{\gamma}$ .

Notar que  $g(\hat{\alpha})$  converge asintóticamente a uno, cuando  $\hat{\alpha} \rightarrow -\infty$ . Como  $\zeta$  es una variable aleatoria que puede tomar valores mayores que uno, existen casos para los cuales la ecuación (3.30) no tiene solución. Este tema se presenta y se resuelve en [83, 84].

### 3.4.2. Interpretación de parámetros

Los parámetros de las distribuciones juegan un papel muy importante en las funciones de densidad. En el caso de la distribución  $\mathcal{G}_A^0$ , el parámetro  $\alpha$  es un parámetro de rugosidad ya que la varianza aumenta a medida que aumenta el valor de  $\alpha$ . Es entonces un indicador del grado de homogeneidad de los datos del área en estudio. El parámetro  $\gamma$  es un parámetro de escala relacionado con el brillo de cada uno de los tipos de regiones presentes en la imagen. Esto significa que si  $W$  es una variable aleatoria con distribución  $\mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, n)$ , entonces

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}W \sim \mathcal{G}_A^0(\alpha, 1, n). \quad (3.33)$$

Finalmente,  $n$  es el parámetro correspondiente a la cantidad de *looks* con que fue construida la imagen y es el mismo para cada pixel.

Para valores de  $\alpha$  cercanos a cero, el área de la imagen presenta niveles de gris correspondientes a una zona muy heterogénea, como el caso de áreas urbanas en imágenes SAR. Acercándonos a áreas menos heterogéneas, como las de forestación, el valor de  $\alpha$  disminuye, alcanzando su menor valor para áreas homogéneas, como las de pastura. Esta es la razón por la cual este parámetro se considera una medida de textura o de rugosidad.

La Figura 3.8 muestra ejemplos de la variación de la rugosidad para varias zonas, en una imagen real de 1 *look*. En esta figura se muestran las regiones para las cuales fueron estimados los parámetros de la distribución  $\mathcal{G}_A^0$ . Las regiones marcadas como 1, 2 y 3 corresponden a zonas de pastura, forestación y urbana respectivamente. El Cuadro 3.1 muestra los valores de los parámetros estimados, los cuales fueron estimados con el método de los momentos  $m_1$  y  $m_{1/2}$  y utilizando las muestras correspondientes a diferentes grados de homogeneidad, marcadas en la Figura 3.8. Se observa que el valor del parámetro  $\alpha$  es menor para la región 1, la cual corresponde a una zona homogénea. El valor mayor de  $\alpha$  corresponde a la región 3 que es una zona urbana.

Las Figuras 3.9(a), 3.9(b) y 3.9(c) muestran los histogramas para los datos de esas regiones y la curva de la densidad de la distribución  $\mathcal{G}_A^0$  con los parámetros estimados que se muestran en el Cuadro 3.1. Se observa que la curva correspondiente a la distribución ajusta muy bien los datos en cada región. Esto significa que el modelo es adecuado para describir los datos con precisión.

Cuadro 3.1: Parámetros estadísticos de la distribución  $\mathcal{G}_A^0$ , estimados a partir de las muestras de la Figura 3.8.

	$\hat{\alpha}$	$\hat{\gamma}$
Región 1	-9,14	372294
Región 2	-3,92	412064
Región 3	-1,40	293242



Figura 3.8: Imagen SAR real con 3 regiones diferentes para las cuales se estimaron los parámetros estadísticos de la distribución  $\mathcal{G}_A^0$ . Las regiones indicadas como 1, 2 y 3 corresponden a una zona homogénea, una zona heterogénea y una zona muy heterogénea respectivamente.

### 3.4.3. Generación de datos distribuidos con distribución $\mathcal{G}_A^0$

Una herramienta importante de la estadística es la simulación de datos que tengan una distribución específica dada a priori. En este trabajo utilizamos imágenes sintéticas, generadas con la distribución  $\mathcal{G}_A^0$ . Las muestras generadas, simulan imágenes SAR con distintas zonas de homogeneidad, y se utilizan para probar los algoritmos desarrollados y hacer comparaciones entre los distintos métodos. En esta sección, se presenta el algoritmo para generación de muestras aleatorias con distribución  $\mathcal{G}_A^0$ , y por lo tanto, los generadores de la distribución  $\Gamma^{-1/2}$ .

Sea  $F$  una función de distribución definida sobre  $\mathbb{R}$  y  $(Z_1, \dots, Z_k)$  variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución  $F$ . Se desea generar una realización  $(z_1, \dots, z_k)$  de  $(Z_1, \dots, Z_k)$ .

Supongamos que hemos generado una realización  $(u_1, \dots, u_k)$  de  $(U_1, \dots, U_k)$  variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución uniforme en el intervalo  $(0, 1)$  que denotamos  $\mathcal{U}(0, 1)$ . Entonces mediante una transformación pasamos de  $(u_1, \dots, u_k)$  a  $(z_1, \dots, z_k)$ . Existen diversos métodos que se utilizan para generación de variables aleatorias con distribución  $F$  a partir de variables aleatorias uniformes, algunos de estos métodos pueden verse en detalle en [22] y [21].

Para la generación de muestras aleatorias con distribución  $\mathcal{G}_A^0$ , se utilizan diversas proposiciones y teoremas que fueron demostrados en [84]. En este trabajo los enunciamos para dar mayor claridad al algoritmo.

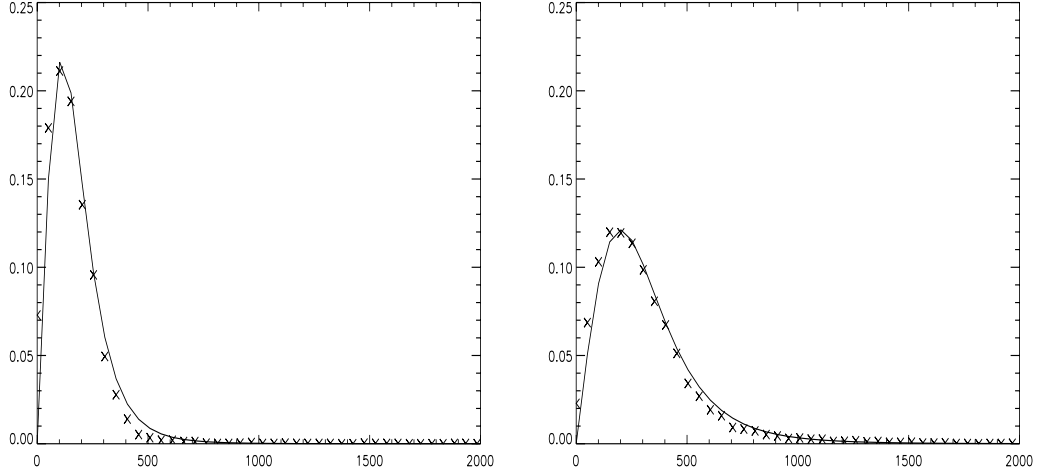
Para desarrollar el algoritmo de generación de variables aleatorias con distribución  $\mathcal{G}_A^0$ , se utilizan las siguientes proposiciones:

■ Proposición 1:

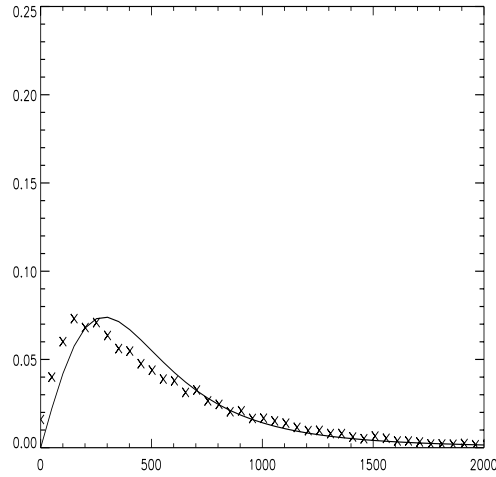
Si  $(u_1, \dots, u_k)$  son variables aleatorias con distribución uniforme, entonces  $x = -\ln\left(\prod_{i=1}^k u_i\right)$  tiene distribución  $\Gamma(k, 1)$ .

■ Proposición 2:

Si  $Y \sim \Gamma(\alpha + 1, 1)$  y  $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$  entonces son válidas las siguientes afirmaciones:



(a) Histograma de la Región 1 (indicado con 'x') y la curva correspondiente a la distribución  $\mathcal{G}_A^0(-9, 14, 372294)$  (línea llena).  
 (b) Histograma de la Región 2 (indicado con 'x') y la curva correspondiente a la distribución  $\mathcal{G}_A^0(-3, 92, 412064)$  (línea llena).



(c) Histograma de la Región 3 (indicado con 'x') y la curva correspondiente a la distribución  $\mathcal{G}_A^0(-1, 40, 293242)$  (línea llena).

Figura 3.9: Histogramas para las tres diferentes regiones de la imagen SAR real que se muestra en la Figura 3.8.

1.  $YU^{1/\alpha} \sim \Gamma(\alpha, 1)$  cuando  $\alpha < 1$ ,
2. Si  $\alpha = 1$  entonces el producto tiene distribución exponencial.

■ Proposición 3:

Las siguientes afirmaciones son válidas:

1. Si  $X \sim \Gamma^{1/2}(\alpha, \lambda)$  entonces  $X\sqrt{\lambda} \sim \Gamma^{1/2}(\alpha, 1)$
2. Si  $X \sim \Gamma^{1/2}(\alpha, \lambda)$  entonces  $X^{-1} \sim \Gamma^{-1/2}(-\alpha, \lambda)$
3. Si  $X \sim \Gamma^{-1/2}(\alpha, \gamma)$  entonces  $X/\sqrt{\gamma} \sim \Gamma^{-1/2}(\alpha, 1)$

Por lo tanto, si es  $\alpha > 0$  es posible generar una muestra aleatoria  $w$ , con distribución  $\Gamma(\alpha, 1)$ . Y  $\sqrt{w}$  es una muestra aleatoria con distribución  $\Gamma^{1/2}(\alpha, 1)$ . Si consideramos la variable  $x = \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{w}}$ , resulta que está distribuida con distribución  $\Gamma^{-1/2}(-\alpha, \gamma)$ . El Algoritmo 1 muestra la secuencia de pasos necesaria para generar muestras de variables aleatorias con esta distribución. Los parámetros  $\alpha$ ,  $\gamma$  y  $n$  son datos de entrada.

---

**Algoritmo 1** Algoritmo de generación de variables aleatorias con distribución  $\mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, n)$ .

---

- 1: Generar una muestra  $w$  con distribución  $\Gamma(\alpha, 1)$ .
  - 2: Considerar  $\sqrt{w}$ , que es una muestra con distribución  $\Gamma^{1/2}(\alpha, 1)$ .
  - 3: Considerar  $x = \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{w}}$ , que es una muestra con distribución  $\Gamma^{-1/2}(-\alpha, \gamma)$ .
  - 4: Generar una muestra  $v$  de  $\Gamma(n, 1)$ .
  - 5: Considerar  $\sqrt{v}$  que es una muestra con distribución  $\Gamma^{1/2}(n, 1)$ .
  - 6: Considerar  $y = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{n}}$ , que es una muestra con distribución  $\Gamma^{1/2}(n, n)$ .
  - 7: Retornar  $z_G = xy$  que es una muestra con distribución  $\mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, n)$ .
- 

La Figura 3.10 muestra una imagen sintética generada con la distribución  $\mathcal{G}_A^0(\alpha, 1, 1)$  utilizando el Algoritmo 1. Los parámetros utilizados son  $\alpha = -2$ ,  $\alpha = -3,5$ ,  $\alpha = -4$  para los objetos y  $\alpha = -10$  para el fondo.

La Figura 3.11 presenta tres muestras generadas con distribución  $\mathcal{G}_A^0(\alpha, 1, 1)$  y diferentes valores del parámetro  $\alpha$ . Las Figuras 3.11(a) y 3.11(b) corresponden a la muestra y el histograma de los datos generados con el parámetro  $\alpha = -10$ . Las Figuras 3.11(c) y 3.11(d) corresponden a la muestra y el histograma de los datos generados con el parámetro  $\alpha = -4$ . Las Figuras 3.11(e) y 3.11(f) corresponden a las muestras y el histograma de los datos para  $\alpha = -1,3$ . Estas muestras corresponden a diferentes grados de homogeneidad, como se explica en la sección 3.4.2. Se observa nuevamente que cuando el parámetro  $\alpha$  se acerca a cero, aumenta la varianza de la muestra y por lo tanto es mayor el grado de homogeneidad de la región en la imagen.

La Figura 3.12 muestra imágenes generadas con la distribución  $\mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, 1)$  para distintos valores de  $\alpha$  y de  $\gamma$ . Puede observarse la variación del brillo de la imagen con respecto al valor de los parámetros. A medida que el valor del parámetro  $\gamma$  crece, el brillo de la imagen se hace más intenso.



La Figura 3.13 muestra el mapa de los parámetros  $\alpha$  y de  $\gamma$  para una imagen generada con la distribución  $\mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, 1)$  para distintos valores de  $\alpha$  y de  $\gamma$ . En la imagen que muestra el mapa de parámetros  $\alpha$  se observan dos regiones bien definidas, correspondientes a datos con distinto grado de homogeneidad.

### 3.5. La distribución $\mathcal{G}^H$

La distribución  $\mathcal{G}^H$  fue propuesta en [88] como un modelo universal alternativo para datos SAR en el contexto del modelo multiplicativo. Luego, fue estudiada y desarrollada en [58] y en [59]. Esta distribución es muy útil en la interpretación de imágenes SAR polarimétricas porque describe los datos polarimétricos con bastante precisión, aunque también se utiliza para imágenes monopolarizadas.

Como en las secciones anteriores, consideramos el retorno como el producto de dos variables aleatorias independientes,  $Z = X.Y$ ,  $X$  correspondiente al *backscatter*,  $Y$  correspondiente al ruido *speckle*. Para este caso, se considera que la variable aleatoria  $X$ , está distribuida con una distribución gaussiana inversa  $GI(\gamma, \lambda)$ . Esta distribución es un caso particular de la distribución gaussiana inversa generalizada  $\mathcal{N}^{-1}(\alpha, \gamma, \lambda)$ , cuya densidad está dada por la siguiente fórmula (Ec. 3.34).

$$f_X(x) = \frac{(\lambda/\gamma)^{\alpha/2}}{2K_\alpha(\sqrt{\lambda\gamma})} x^{\alpha-1} e^{(-\frac{1}{2}(\lambda x + \frac{\gamma}{x}))} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x), \quad (3.34)$$

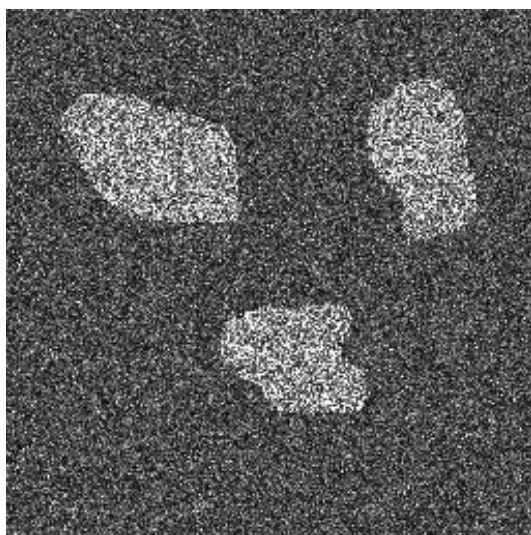


Figura 3.10: Imagen sintética generada con la distribución  $\mathcal{G}_A^0(\alpha, 1, 1)$ , con tres diferentes áreas, correspondientes a los parámetros  $\alpha = -2, 0, -3, 5, -4, 0$  para los objetos y  $\alpha = -10$  para el fondo.

determinada por los parámetros  $\gamma$ ,  $\lambda$  y  $\alpha$ , donde

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ 0 & \text{if } x \notin A \end{cases} \quad (3.35)$$

Los intervalos de variación de estos parámetros están dados por

$$\begin{cases} \gamma > 0 & \text{y} & \lambda \geq 0 & \text{si} & \alpha < 0 \\ \gamma > 0 & \text{y} & \lambda > 0 & \text{si} & \alpha = 0 \\ \gamma \geq 0 & \text{y} & \lambda > 0 & \text{si} & \alpha > 0 \end{cases} \quad (3.36)$$

La función  $K_\alpha$  es la función de Bessel modificada de tercera especie y orden  $\alpha$  y está dada por

$$K_\alpha(\sqrt{ab}) = \left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha/2} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{1}{2}(ax + bx^{-1})\right) dx.$$

En el caso particular en que el parámetro  $\alpha = \frac{-1}{2}$ , se obtiene la distribución gaussiana inversa  $GI(\gamma, \lambda)$ , cuya función de densidad está dada por la siguiente ecuación (Ec. 3.37).

$$f_X(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi x^3}} e^{\left(-\frac{(\sqrt{\lambda}x - \sqrt{\gamma})^2}{2x}\right)} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x), \quad (3.37)$$

con  $\lambda, \gamma > 0$ .

Los momentos de esta distribución están dados por

$$\mathbb{E}[X^r] = \left(\frac{2}{\pi} \sqrt{\gamma\lambda}\right)^{1/2} \exp(\sqrt{\gamma\lambda}) \left(\sqrt{\frac{\gamma}{\lambda}}\right)^r K_{r-\frac{1}{2}}(\sqrt{\gamma\lambda}), \quad (3.38)$$

por lo que, los momentos de primer orden, de segundo orden y la varianza son

$$\mathbb{E}[X] = \sqrt{\frac{\gamma}{\lambda}}, \quad (3.39)$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{\gamma}{\lambda} + \sqrt{\frac{\gamma}{\lambda^3}} \gamma \quad (3.40)$$

$$\mathbb{E}[(X^2 - \mathbb{E}[X])^2] = \sqrt{\frac{\gamma}{\lambda^3}}, \quad (3.41)$$

respectivamente.

Los parámetros  $\gamma$  y  $\lambda$  pueden ser utilizados para definir un nuevo par de parámetros  $\omega$  y  $\eta$ , mediante las siguientes fórmulas

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\gamma\lambda}, \\ \eta &= \sqrt{\gamma/\lambda}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

de manera que la fórmula (3.37) queda expresada como

$$f_X(x) = \sqrt{\frac{\omega\eta}{2\pi x^3}} \exp\left(-\frac{1}{2}\omega \frac{(x - \eta)^2}{x\eta}\right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x). \quad (3.43)$$

Entonces  $X \sim GI(\omega, \eta)$ , y es posible ver que los momentos correspondientes están dados por

$$\mathbb{E}[X^r] = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} e^{\omega} \eta^r K_{r-\frac{1}{2}}(\omega). \quad (3.44)$$

Entonces, los momentos de primer orden, de segundo orden y la varianza son

$$\mathbb{E}[X] = \eta, \quad (3.45)$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \eta^2 \frac{\omega + 1}{\omega} \quad (3.46)$$

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \eta^2 \frac{1}{\omega} \quad (3.47)$$

respectivamente. Puede observarse que con esta reparametrización el parámetro  $\eta$  corresponde al valor medio y que la varianza se agranda a medida que  $\omega$  se acerca a 0.

Si  $X \sim GI(\omega, \eta)$  entonces  $X/\eta \sim GI(\omega, 1)$ , y por lo tanto la densidad de la variable aleatoria  $X/\eta$  está dada por la siguiente ecuación, (Ec. 3.48)

$$f_{X|\eta}(x) = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi x^3}} \exp\left(-\frac{1}{2}\omega \frac{(x-1)^2}{x}\right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x) \quad (3.48)$$

En la Figura 3.14 pueden verse las curvas correspondientes a la densidad para  $\eta = 1$  y varios valores de  $\omega$ . Puede observarse que la varianza aumenta a medida que el parámetro  $\omega$  se acerca a 0.

En la figura 3.15 pueden verse las curvas correspondientes a la densidad para  $\omega = 1$  y varios valores de  $\eta$ . Se observa que la curva se aplanan a medida que el valor del parámetro aumenta.

Nuevamente, consideramos el retorno como el producto de dos variables aleatorias independientes,  $Z = X.Y$ ,  $X$  correspondiente a la retrodispersión,  $Y$  correspondiente al ruido *speckle*. En este caso, se considera  $X \sim GI(\omega, \eta)$  e  $Y \sim \Gamma(n, n)$ , entonces la distribución para el retorno  $Z$  es  $\mathcal{G}_I^H(\omega, \eta, n)$  y su función de densidad está dada por la siguiente ecuación (Ec. 3.49)

$$f_Z(z) = \frac{n^n}{\Gamma(n)} \sqrt{\frac{2\omega\eta}{\pi}} \exp(\omega) \left(\frac{\omega}{\eta(\omega\eta + 2zn)}\right)^{\frac{1}{2}n + \frac{1}{4}} z^{n-1} K_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\frac{\omega}{\eta}}(\omega\eta + 2zn)\right) \quad (3.49)$$

Los momentos de orden  $r$  de la distribución  $\mathcal{G}_I^H$  son:

$$\mathbb{E}_{\mathcal{G}^H}(Z^r) = \left(\frac{\eta}{n}\right)^r e^{\omega} \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} K_{r-1/2}(\omega) \frac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(n)}, \quad (3.50)$$

Los cuales son utilizados para la estimación de los parámetros estadísticos. De acuerdo a esta ecuación resulta el momento de orden 1:

$$\mathbb{E}[Z] = \eta \quad (3.51)$$

y el momento de segundo orden

$$\mathbb{E}[Z^2] = \eta^2 \left( \frac{\omega + 1}{\omega} \right) \left( \frac{n + 1}{n} \right) \quad (3.52)$$

En esta tesis utilizamos la distribución  $\mathcal{G}_P^H$  polarimétrica para describir, simular y analizar los datos SAR polarimétricos. Por esa razón dejamos la estimación de los parámetros  $\omega$  y  $\eta$  y el algoritmo de generación de datos con distribución  $\mathcal{G}^H$  para el capítulo 9, en el que tratamos imágenes SAR polarimétricas.

### 3.6. Conclusiones

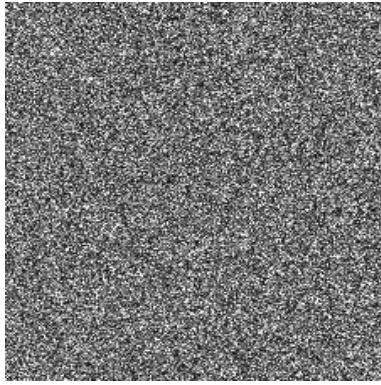
En este capítulo se presentan las distribuciones estadísticas que se utilizan en el resto de esta tesis para modelar los datos provenientes de imágenes SAR. Introducimos el modelo multiplicativo, el cual establece que el retorno  $Z$  se modela como el producto de dos variables aleatorias independientes, una correspondiendo al *backscatter*  $X$  y la otra correspondiendo al ruido *speckle*  $Y$ .

Para datos monopolarizados, la variable  $Y$  se modela con la distribución  $\Gamma(n, n)$ , donde  $n$  es el número de *looks*, mientras que la restrodispersión  $X$  se considera con distribución Gaussiana Inversa Generalizada,  $\mathcal{N}^{-1}(\alpha, \lambda, \gamma)$  en formato intensidad y  $\mathcal{N}^{-\frac{1}{2}}(\alpha, \lambda, \gamma)$  en formato amplitud.

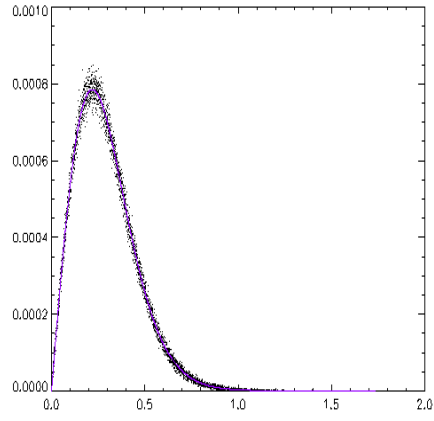
Para valores particulares de los parámetros de la distribución  $\mathcal{N}^{-1}$ , se obtienen las distribuciones  $\Gamma(\alpha, \lambda)$ ,  $\Gamma^{-1}(\alpha, \gamma)$ , y  $IG(\gamma, \lambda)$  (Gaussiana Inversa) en formato de intensidad y  $\Gamma^{\frac{1}{2}}(\alpha, \lambda)$ ,  $\Gamma^{-\frac{1}{2}}(\alpha, \gamma)$ , y  $IG^{\frac{1}{2}}(\gamma, \lambda)$  en formato amplitud. Las cuales producen las distribuciones  $K$ ,  $\mathcal{G}^0$  y  $\mathcal{G}^H$  para el retorno  $Z$ , respectivamente.

Se introduce la estimación de los parámetros estadísticos que caracterizan a las distintas regiones en la imagen y la interpretación de los mismos. También se explica el algoritmo de generación de variables aleatorias con distribuciones  $\mathcal{G}_A^0$ , para simulación de datos SAR.

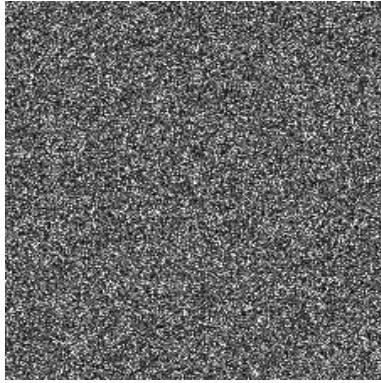
En esta tesis utilizamos la familia de distribuciones  $\mathcal{G}$  como herramienta para modelar los datos provenientes de imágenes SAR. Estas distribuciones proveen una forma para analizar los datos tomando ventaja de las propiedades estadísticas de los mismos.



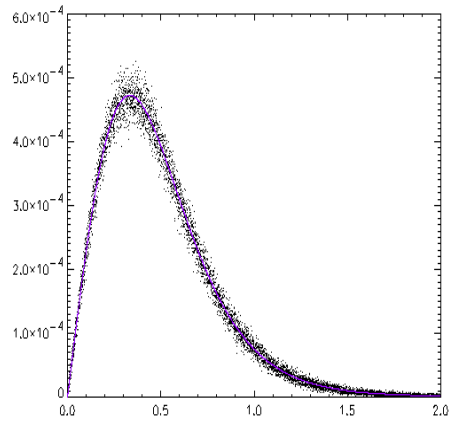
(a) Muestra aleatoria generada con distribución  $\mathcal{G}_A^0(-10, 1, 1)$ .



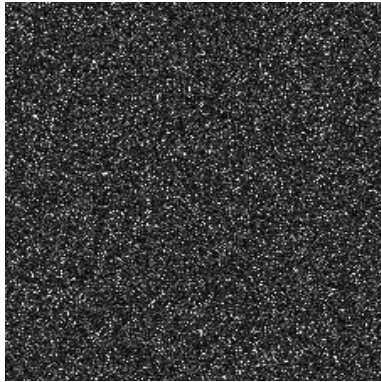
(b) Densidad de la muestra 3.11(a).



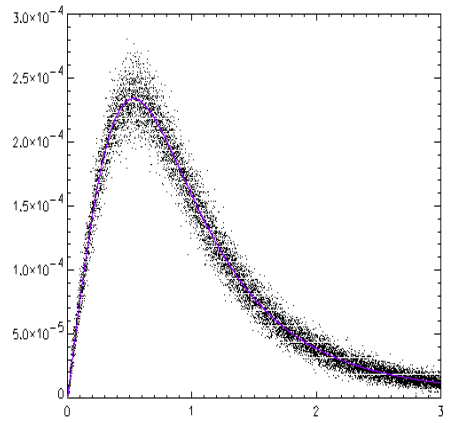
(c) Muestra aleatoria generada con distribución  $\mathcal{G}_A^0(-4, 1, 1)$ .



(d) Densidad de la muestra 3.11(c).



(e) Muestra aleatoria generada con distribución  $\mathcal{G}_A^0(-1, 3, 1)$ .



(f) Densidad de la muestra 3.11(e).

Figura 3.11: Muestras e histogramas de datos generados con distribución  $\mathcal{G}^0(\alpha, 1, 1)$ , para  $\alpha = -10$  (a y b),  $\alpha = -4$  (c y d) y  $\alpha = -1, 3$  (e y f).

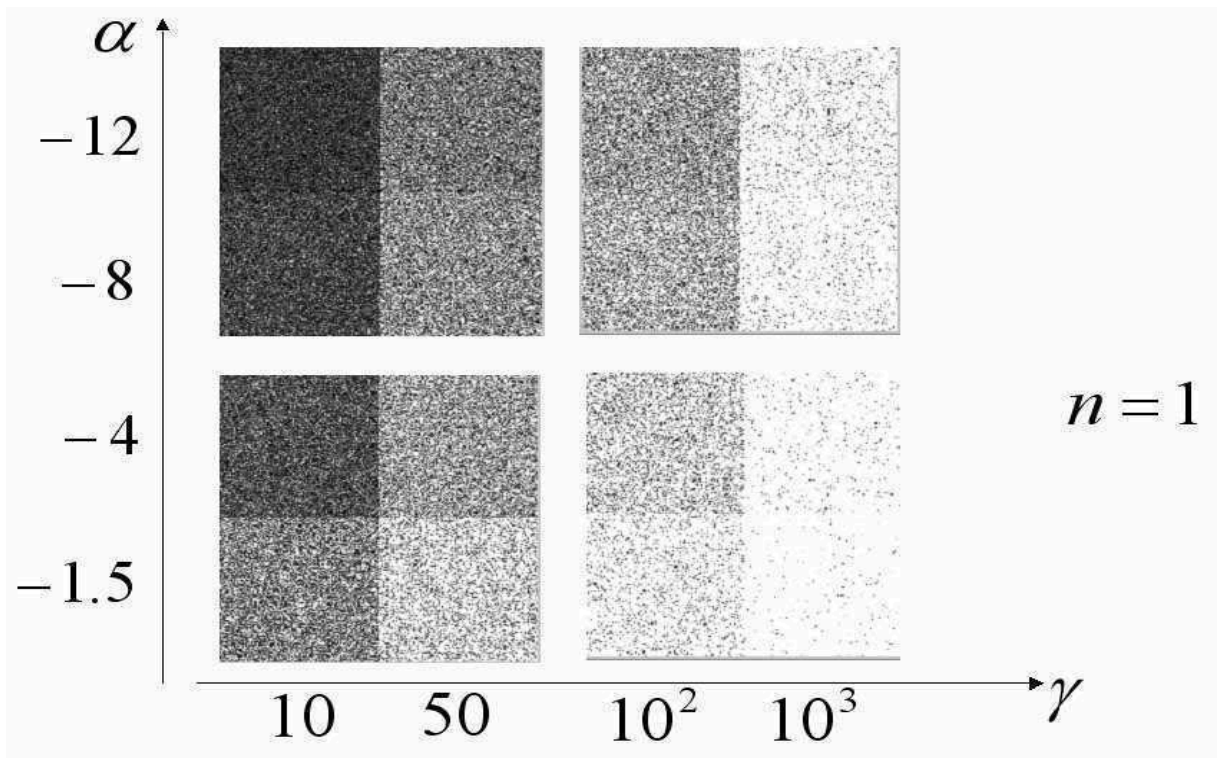


Figura 3.12: Imágenes sintéticas generadas con la distribución  $\mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, 1)$

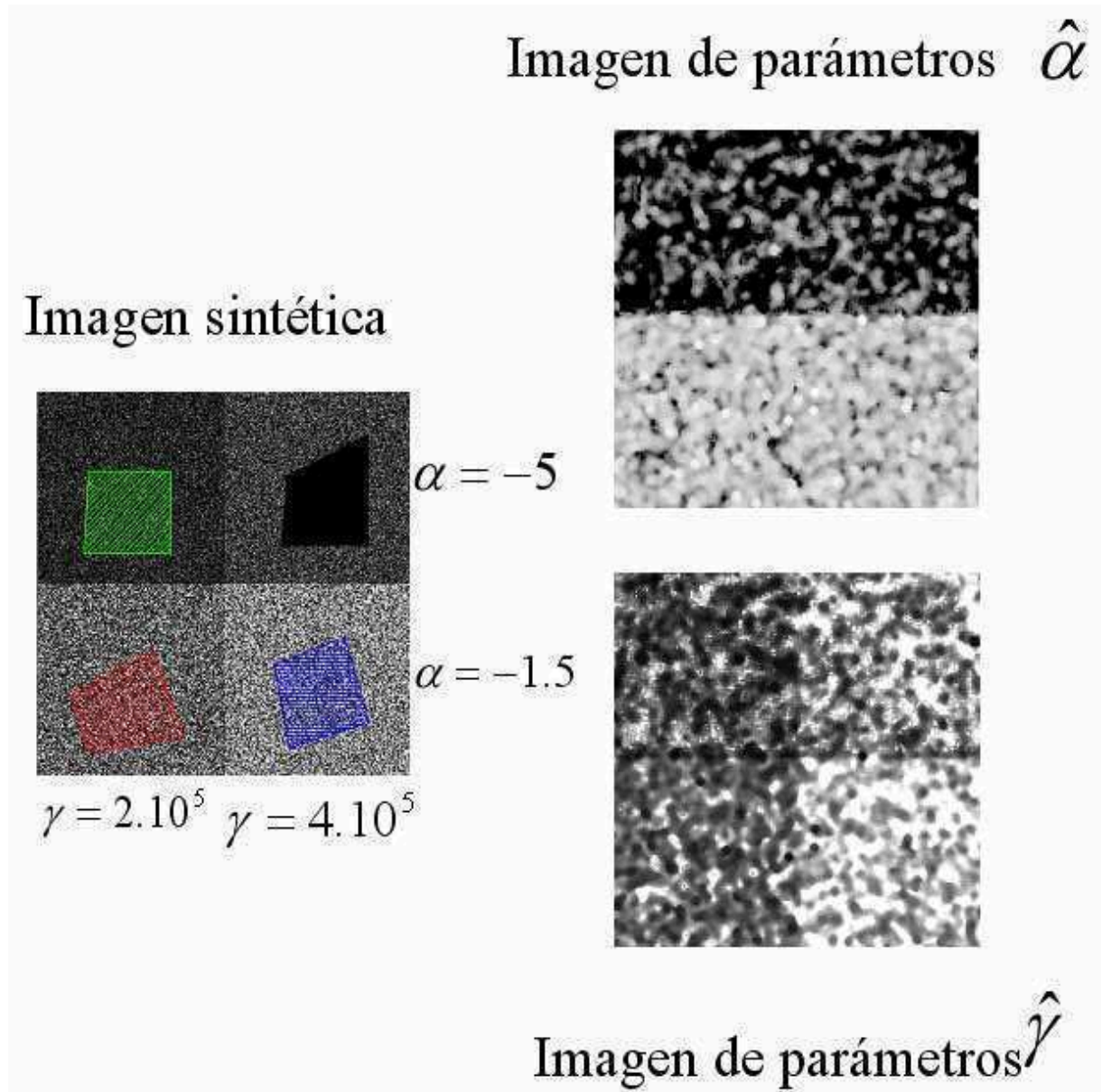


Figura 3.13: Mapa de los parámetros  $\alpha$  y  $\gamma$  para una imagen sintética generada con la distribución  $\mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, 1)$  con distintos valores de los parámetros.

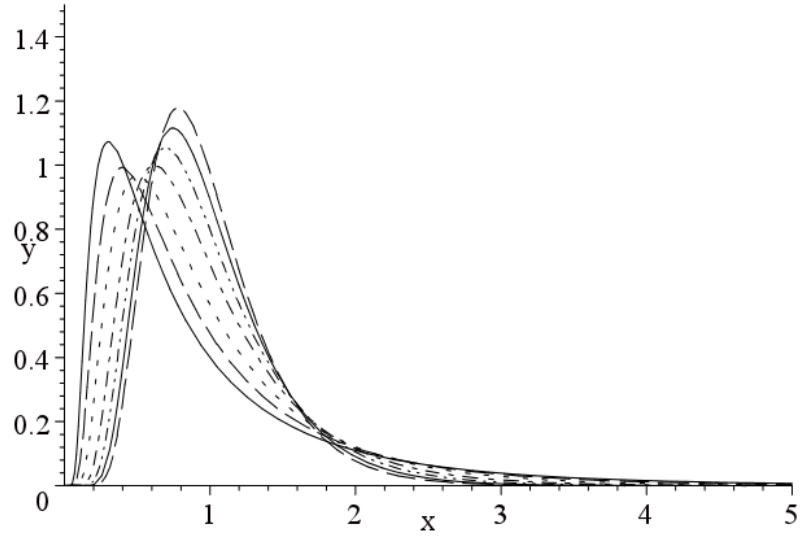


Figura 3.14: Densidad de la distribución  $GI(x, \omega, \eta)$ , para  $\eta = 1$  y  $\omega = 1$  (sólida),  $\omega = \sqrt{2}$  (trazos),  $\omega = 2$  (puntos),  $\omega = 3$  (punto-trazo),  $\omega = 4$  (punto-punto-trazo),  $\omega = 5$  (sólida) y  $\omega = 6$  (trazos).

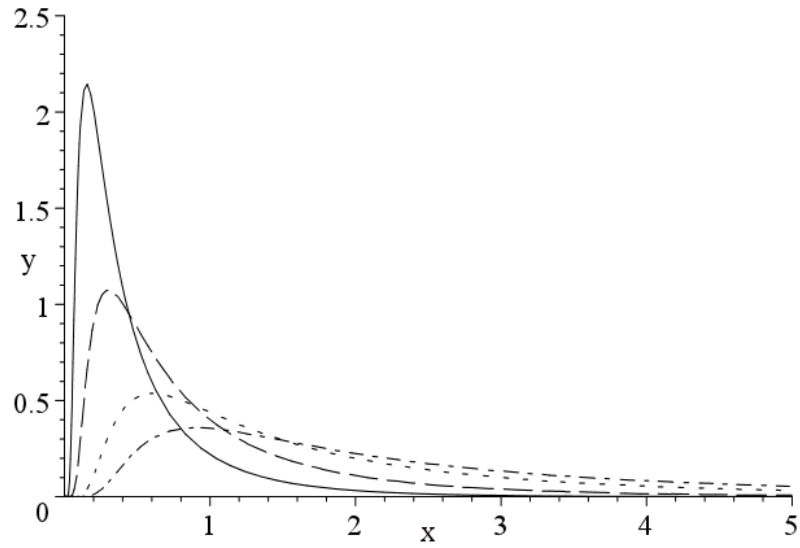


Figura 3.15: Densidad de la distribución  $GI(x, \omega, \eta)$ , para  $\omega = 1$  y  $\eta = 0,5$  (sólida),  $\eta = 1$  (trazos),  $\eta = 2$  (puntos) y  $\eta = 3$  (punto-trazo).





## Capítulo 4

# Representación B-Spline de curvas

La representación B-Spline para curvas es muy utilizada en procesamiento de imágenes, computación gráfica y visión, porque provee una herramienta muy eficaz en la descripción y aproximación de funciones, curvas y superficies. Esta técnica ha sido utilizada en muchas aplicaciones, como en detección de bordes [17, 37, 32, 121], en aproximación de formas [82, 108, 53], en seguimiento de objetos en secuencias de video [12, 9, 51, 50] y en segmentación de imágenes [57, 104, 33], entre otros. En este trabajo se utiliza la representación B-Spline para curvas con el propósito de describir el contorno de los objetos. Esta formulación tiene varias ventajas:

1. La curva queda representada por sus puntos de control, lo cual reduce la cantidad de parámetros y por lo tanto el costo computacional. Esto implica, por ejemplo, que si se quiere aplicar una transformación afín (rotación, traslación, escalamiento) a la curva, es suficiente aplicarla a sus puntos de control.
2. Puede elegirse el orden de la curva de acuerdo a la suavidad necesaria para el contorno del objeto de interés.
3. Dada su característica de control local, permite modificar la curva localmente por medio de sus puntos de control.
4. Tiene la propiedad de la cápsula convexa.

En este capítulo se presenta una explicación sobre curvas B-Spline, que se utiliza como herramienta para describir contornos en los capítulos posteriores. En la sección 4.1 se introduce la teoría sobre puntos de control, la base funcional B-Spline y sus propiedades. En la sección 4.2 se presenta la teoría sobre interpolación de puntos por medio de una curva B-Spline. En el Apéndice C se da una explicación más detallada sobre generación de estas curvas y una forma de implementar el algoritmo que resulta muy conveniente para nuestro propósito; para consultar sobre este tema, ver [9, 107, 27]. Las curvas usadas en este trabajo para extracción de contornos son cerradas, de orden 3 ó 4, especificadas por

funciones B-Spline periódicas, pero los métodos son válidos para cualquier orden y para cualquier base.

#### 4.1. Curvas B-Spline, puntos de control y la base B-Spline

Sea  $\{Q_0, \dots, Q_{N_B-1}\}$  un conjunto de puntos de control, donde  $Q_n = (x_n, y_n)^t \in \mathbb{R}^2$ ,  $0 \leq n \leq N_B - 1$ , y sea  $\{s_0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_{L-1}\} \subset \mathbb{R}$  un conjunto de  $L$  nodos. Una curva B-Spline de orden  $d$  se define como una suma ponderada de  $N_B$  funciones polinomiales  $B_{n,d}(s)$  de grado  $d-1$ , dentro del intervalo  $[s_i, s_{i+1})$  con  $0 \leq i \leq L-1$ , donde los puntos de control son los pesos.

La curva B-Spline se construye como  $r(s) = (x(s), y(s))^t$ ,  $0 \leq s \leq L-1$ , siendo

$$r(s) = \sum_{n=0}^{N_B-1} B_{n,d}(s) Q_n, \quad (4.1)$$

Dado que  $d$  es el orden de la curva, en cada intervalo  $[s_i, s_{i+1})$ ,  $0 \leq i \leq L-1$  interviene un polinomio de grado  $d-1$ . Además

$$x(s) = B^t(s) \cdot Q^x \quad (4.2)$$

$$y(s) = B^t(s) \cdot Q^y \quad (4.3)$$

donde el vector de funciones base  $B(s)$  de  $N_B$  componentes está dado por

$$B(s) = (B_{0,d}(s), \dots, B_{N_B-1,d}(s))^t.$$

Los vectores de puntos  $Q^x$  y  $Q^y$  son las primeras y segundas componentes de  $Q_n$ ,  $n = 0, \dots, N_B - 1$ , respectivamente.

La Ecuación 4.1 puede escribirse también en forma matricial:

$$r(s) = U(s) \cdot Q = \begin{pmatrix} B^t(s) & 0 \\ 0 & B^t(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^x \\ Q^y \end{pmatrix}$$

En lo que sigue se presenta la base de funciones B-Spline y sus propiedades.

##### Funciones Base: Definición y Propiedades

Las bases  $B_{n,d}$  para  $n = 1, \dots, N_B$  se definen recursivamente en  $d$ , de la siguiente manera:

$$B_{n,1}(s) = \begin{cases} 1 & s_n \leq s < s_{n+1} \\ 0 & \forall \text{ otro caso} \end{cases}$$

paso inductivo en  $d$ :

$$B_{n,d}(s) = \frac{(s - s_n)B_{n,d-1}(s)}{s_{n+d-1} - s_n} + \frac{(s_{n+d} - s)B_{n+1,d-1}(s)}{s_{n+d} - s_{n+1}}$$

para  $d > 1$ , donde  $0 \leq s_n \leq L-1$  y  $0 \leq n \leq N_B - 1$ .

Cuando la secuencia de nodos  $\{s_0, \dots, s_L\}$  es equiespaciada, la base se llama B-Spline uniforme.

En el caso particular en que  $s_n = n, \forall 0 \leq n \leq L-1$ , es decir que la secuencia de nodos son los números naturales, se obtiene una base funcional llamada B-Splines uniforme de orden  $d$ , definida de la siguiente manera:

$$B_{n,1}(s) = \begin{cases} 1 & n \leq s < n+1 \\ 0 & \forall \text{ otro caso} \end{cases}$$

paso inductivo en  $d$ :

$$B_{n,d}(s) = \frac{(s-n)B_{n,d-1}(s) + (n+d-s)B_{n+1,d-1}(s)}{d-1}$$

En esta tesis utilizamos esta base por ser la más conveniente para nuestro propósito. Para representar curvas cerradas, como es nuestro objetivo, es necesario que la base B-Spline sea periódica, esto requiere que la secuencia de nodos  $\{s_0, s_1, \dots, s_{L-1}\}$  sea periódica, es decir que  $s_j = s_{j \bmod L}$ . También es posible obtener la base periódica  $B_{n,d}(s)$  para  $n = 1, \dots, N_B$ , expandiendo la base no periódica, con período  $L$ . En este caso, si los nodos son equiespaciados, entonces la base es uniforme y periódica y las funciones base solo difieren en un corrimiento, como muestra la ecuación 4.4.

## Propiedades de la Base B-Spline Uniforme y Periódica

### 1. Soporte

$$\text{sop}(B_{n,d}(s)) = [n, n+d)$$

### 2. Positividad

$$B_{n,d}(s) \geq 0, \forall s \in [0, L-1]$$

### 3. Normalización

$$\sum_{n=0}^{N_B} B_{n,d}(s) = 1, \forall s \in [0, L-1]$$

### 4. Invarianza traslacional

$$B_{n+1,d}(s) = B_{n,d}(s-1) \tag{4.4}$$

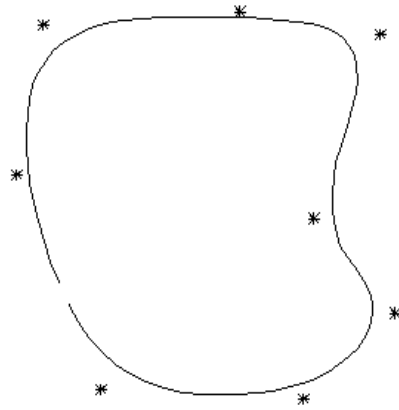
### 5. Condición de suavidad

$$B_{n,d}(s) \text{ es } C^{d-2}, \forall s \text{ y } \forall d > 1,$$

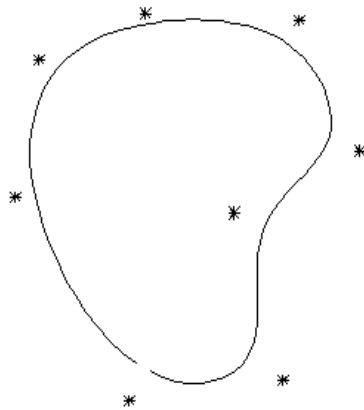
## Ejemplos

Las Figuras 4.1(a) y 4.1(b) muestran ejemplos de puntos de control que generan curvas B-Spline, de orden  $d = 3$  y  $d = 4$ , respectivamente. La Figura 4.2 muestra un ejemplo

de un polígono de control generando la curva correspondiente, para distintos valores del orden  $d$ . Los vértices del polígono son los puntos de control. Se observa que a medida que aumenta el valor de  $d$  la curva se aleja de los puntos de control.



(a) Conjunto de puntos de control (\*) que genera una curva B-Spline de orden  $d = 3$  (línea sólida).



(b) Conjunto de puntos de control (\*) que genera una curva B-Spline de orden  $d = 4$  (línea sólida).

Figura 4.1: Ejemplo de un conjunto de puntos de control que generan curvas B-Spline de orden  $d = 3$  y  $d = 4$ .

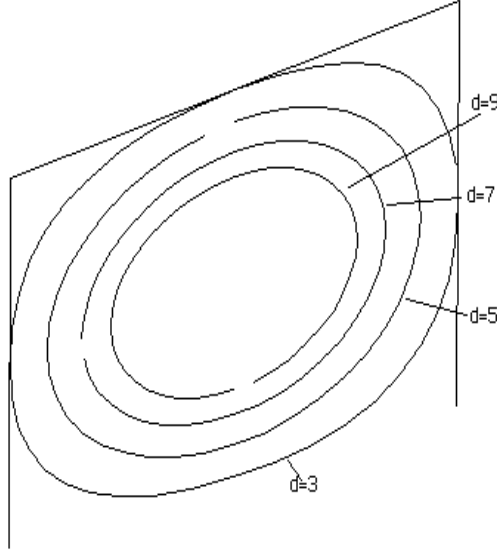


Figura 4.2: Polígono de control que genera curvas B-Spline para distintos valores del orden  $d$ .

## 4.2. Ajuste de de puntos por curvas B-Spline

Para resolver el problema de encontrar los  $N_B$  puntos de control que generen una curva B-Spline que ajuste a un contorno, utilizamos el esquema presentado en esta sección. Para más detalles ver [107, 32].

Dado un conjunto de  $k$  puntos de la imagen,

$$\{D_0, D_1, \dots, D_{k-1}\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_{k-1} & y_{k-1} \end{pmatrix} \right\}$$

se quiere encontrar la curva B-Spline que mejor ajusta a estos puntos. Entonces se desea hallar el conjunto de puntos de control  $\{Q_0, Q_1, \dots, Q_{N_B-1}\}$  que determine una curva B-Spline que ajuste los puntos  $D_i$   $i = 0, \dots, k-1$ , con la condición  $N_B \leq k$  y donde el orden  $d$  se supone dado. Habitualmente es  $N_B \ll k$ . Entonces, por las ecuaciones 4.2 y 4.3, los puntos  $D_i$  deben satisfacer

$$D_i = U(s_i) Q = \begin{pmatrix} B^t(s_i) & 0 \\ 0 & B^t(s_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^x \\ Q^y \end{pmatrix}$$

$\forall i = 0, \dots, k-1$ , para ciertos parámetros  $s_i$ .

La ecuación anterior es equivalente a que

$$\begin{pmatrix} x_i & y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^t(s_i) Q^x & B^t(s_i) Q^y \end{pmatrix}, \quad i = 0, \dots, k-1$$

$$\text{Llamando } D = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ x_{k-1} & y_{k-1} \end{pmatrix} \text{ y } K = \begin{pmatrix} B^t(s_0) \\ B^t(s_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B^t(s_{k-1}) \end{pmatrix}$$

debe cumplirse

$$D = K \begin{pmatrix} Q^x & Q^y \end{pmatrix}$$

donde los parámetros  $s_i$ ,  $i = 0, \dots, k-1$  son elegidos apropiadamente para que la matriz  $K$  tenga rango columna completo.

Resulta entonces, dos sistemas de ecuaciones lineales, cuyas incógnitas son los puntos de control:

$$\begin{pmatrix} Q^x & Q^y \end{pmatrix}$$

Si  $N_B = k$ ,  $K$  inversible y por lo tanto

$$K^{-1}D = \begin{pmatrix} Q^x & Q^y \end{pmatrix}$$

Si  $N_B < k$  entonces  $K$  no es cuadrada y usamos la pseudoinversa para hallar la solución de mínimos cuadrados del sistema:

$$(K^t K)^{-1} K^t D = \begin{pmatrix} Q^x & Q^y \end{pmatrix}$$

Los parámetros  $\{s_0, \dots, s_{k-1}\}$  pueden elegirse de distintas maneras. En este trabajo utilizamos los llamados *parámetros de la cuerda* y están dados por:

$$s_0 = 0$$

$$s_l = \frac{\sum_{i=1}^l \|D_i - D_{i-1}\|}{\sum_{i=1}^{k-1} \|D_i - D_{i-1}\| + \|D_k - D_0\|}$$

para  $l \geq 1$ .

## Ejemplos

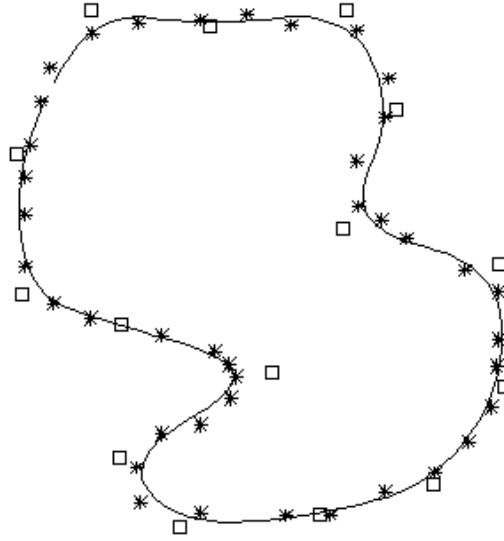
Las Figuras 4.3(a) y 4.3(b) muestran dos curvas B-Spline de ajuste para el mismo conjunto de datos compuesto por 40 puntos, con  $N_B = 15$  y  $N_B = 10$  puntos de control, respectivamente. Los puntos marcados con '\*' corresponden al conjunto de datos de entrada, para el cual se desea encontrar una curva de ajuste. Los puntos marcados con '□' corresponden a los puntos de control que encuentra el algoritmo y que genera la curva B-Spline (línea sólida). La Figura 4.4 muestra un ejemplo donde se aplica el algoritmo anterior. En este ejemplo se desea ajustar 27 puntos del plano con una curva B-Spline generada por  $N_B = 12$  puntos de control. En todos los ejemplos que se muestran en este capítulo se utiliza  $d = 3$ .

### 4.3. Conclusiones

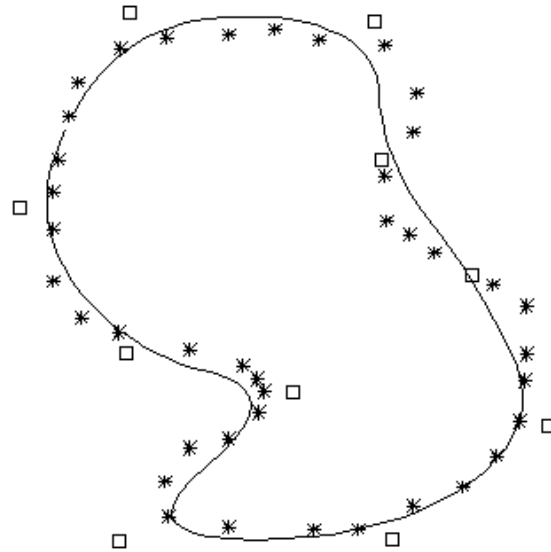
Este capítulo está dedicado a la representación B-Spline de curvas en el plano de la imagen. Consiste en una suma pesada de funciones base, generada por un conjunto de puntos de control. Se muestra un resumen sobre la teoría de puntos de control, la base funcional B-Spline y sus propiedades. Se presenta también la teoría sobre ajuste de puntos por medio de una curva B-Spline. Algunos puntos de este tema son explicados con mayor detalle en el Apéndice C.

Esta representación es muy conveniente para graficar curvas porque involucra pocos parámetros, es intrínsecamente suave y provee una fórmula matemática para el contorno que se desea encontrar. En los capítulos que siguen utilizamos curvas B-Spline como una herramienta fundamental en la detección de bordes y descripción de contornos de regiones.





(a) Conjunto de 40 datos que se desea ajustar por una curva B-Spline (\*), curva de ajuste (línea sólida), 15 puntos de control ( $\square$ ).



(b) Conjunto de 40 datos que se desea ajustar por una curva B-Spline (\*), curva de ajuste (línea sólida), 10 puntos de control ( $\square$ ).

Figura 4.3: Conjunto de datos que se desea ajustar por una curva B-Spline (\*), curva de ajuste (línea sólida), puntos de control ( $\square$ ).

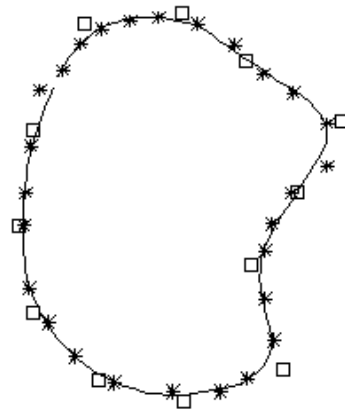


Figura 4.4: Conjunto de 27 datos que se desea ajustar por una curva B-Spline (\*), curva de ajuste (línea sólida), 12 puntos de control ( $\square$ ).



## Capítulo 5

# Detección de contornos en imágenes SAR utilizando la distribución $\mathcal{G}_A^0$ y curvas B-Spline

La naturaleza multiplicativa del ruido *speckle* hace que los métodos de detección de bordes desarrollados para imágenes ópticas sean ineficientes cuando se aplican a imágenes SAR. El ruido de la imagen es la principal dificultad en los algoritmos de detección de bordes porque muchos de ellos encuentran regiones utilizando extracción local de características, es decir utilizando la información presente en un pixel. En el caso de detección de bordes de objetos en imágenes con ruido *speckle*, no es posible utilizar la información puntual, sino que hay que analizar la imagen a partir de conjuntos de pixels (ver [42]). La detección de bordes en imágenes con ruido *speckle* ha sido objeto de estudio por parte de muchos autores y una gran variedad de técnicas han sido presentadas. Los enfoques para segmentación de este tipo de imágenes pueden separarse en dos grandes clases:

1. Enfoque basado en bordes.
2. Enfoque basado en regiones.

Los trabajos basados en la búsqueda de cambios abruptos en la reflectividad media, como los presentados en los artículos [120], [34] y [35], pertenecen a la primera clase. Mientras que los algoritmos basados en filtros, como el que se presenta en [45] pertenecen a la segunda clase. También se han desarrollado técnicas basadas en contornos activos, por ejemplo, en [44] se presenta un algoritmo de contornos activos, utilizando la distribución  $\Gamma$  para describir los datos SAR. En el artículo [52] los autores utilizan la distribución Gaussiana para el modelado de los datos. En los artículos [2, 3] se presentan algoritmos de segmentación de imágenes SAR utilizando conjuntos de nivel. En todos los casos se obtiene un éxito relativo por el alto costo computacional que estas técnicas conllevan y la enorme complejidad de las imágenes SAR.

En este trabajo elegimos algoritmos basados en regiones porque modelamos los datos de diferentes áreas de la imagen con distribuciones estadísticas que poseen distintos parámetros. Proponemos un nuevo método de ajuste de curvas a contornos de objetos o regiones en imágenes con ruido *speckle* que tiene excelentes resultados, con un aceptable costo computacional. Los algoritmos propuestos consideran la imagen por regiones, en lugar de hacerlo sobre toda la imagen, lo cual es un gran ahorro en tiempo de cómputo. Además provee una fórmula matemática para el contorno que depende de muy pocos parámetros.

El algoritmo comienza con un paso de inicialización, es decir una curva inicial, que es encontrada automáticamente y que tiene el objetivo de que los procedimientos tengan más rápida convergencia y menor costo computacional. Luego, se deforma la curva inicial hasta ajustar el contorno del objeto de interés.

Para encontrar los puntos de borde entre las diferentes regiones de la imagen se trabaja sobre la hipótesis de que los datos SAR son modelados con la distribución estadística  $\mathcal{G}_A^0$  bajo el modelo multiplicativo. Bajo el modelo  $\mathcal{G}_A^0$ , las regiones de la imagen con distinto grado de homogeneidad quedan caracterizadas por los parámetros de la distribución. Con este propósito, se estiman los parámetros correspondientes, a lo largo de segmentos de recta dispuestos en un entorno de la curva inicial. Si un punto pertenece al borde del objeto, entonces en una vecindad de ese punto existe un cambio brusco en los parámetros estadísticos de la distribución que lo modela.

Este método tiene problemas de convergencia en el caso en que el objeto del cual se desea encontrar el borde no sea convexo. En este capítulo se muestran cuáles son estos problemas, que dependen de la forma del objeto y se propone un algoritmo para resolverlos.

Este capítulo constituye el aporte original más importante de esta tesis.

Está compuesto de la siguiente manera: en primer lugar, en la sección 5.1 se introduce un algoritmo para hallar regiones iniciales automáticamente, que sirven como paso inicial para los métodos de detección de contornos. En la sección 5.2 se presenta el primer algoritmo de detección de borde, basado en una serie de segmentos de recta ubicados estratégicamente sobre la imagen. En la sección 5.3 se explica la forma en que se toman los datos de la muestra para estimar los parámetros. El algoritmo descrito anteriormente busca los puntos de borde del objeto a partir del punto de borde encontrado en el paso anterior, luego, en la sección 5.4 se presenta un algoritmo para encontrar el primer punto de borde, que es muy importante para la convergencia del método. En la sección 5.5 se muestran cuáles son los problemas de convergencia que tiene el algoritmo, que dependen de la forma del objeto y se propone una forma de resolverlos. En la sección 5.6 se muestran los resultados en imágenes SAR reales. Finalmente, en la sección 5.7 se presentan las conclusiones para este capítulo.

## 5.1. Regiones iniciales de búsqueda

Sea  $E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una escena compuesta por el fondo  $B$  y un conjunto de regiones  $\{R_1, R_2, \dots, R_k\}$  con sus respectivas fronteras  $\{\partial R_1, \dots, \partial R_k\}$ . Cada una de estas regiones y el fondo son considerados campos aleatorios de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con la distribución  $\mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, n)$  y caracterizadas por los valores de sus parámetros estadísticos  $\alpha$  y  $\gamma$ . Deseamos encontrar una curva  $C_j$  que ajuste al borde de cada región  $\partial R_j$  en la imagen. En escenas de imágenes SAR, un borde puede ser definido como un salto abrupto en los valores de la retrodispersión, este borde ideal está degradado por el ruido *speckle*, entonces definimos un borde como el lugar de la imagen donde hay un cambio abrupto en los valores de los parámetros estadísticos.

Como se muestra en la sección 3.4.2, existe una correspondencia entre el grado de homogeneidad presente en la imagen y los parámetros de rugosidad y escala estimados. A partir de esta correspondencia se puede hacer una clasificación de cada pixel de la imagen. El algoritmo propuesto en esta sección separa cierto tipo de regiones del resto de la imagen, de manera de obtener una primera aproximación del objeto que se está buscando, y que se utiliza para inicializar los métodos de extracción de contornos descritos en las siguientes secciones. Los algoritmos de detección de contornos que se describen a continuación, trabajan sobre estas regiones en lugar de analizar la imagen completa, reduciendo el costo computacional.

Se hace una partición de la imagen de la siguiente forma:

$$f: S \rightarrow \mathbb{R},$$

donde

$$S = [0, \dots, mS_p - 1] \times [0, \dots, nS_p - 1]$$

$m, n, S_p \in \mathbb{N}$ , es decir que la partición  $f$  está compuesta por  $m \times n$  bloques de lado  $S_p$ , como muestra la Figura 5.1. Sin pérdida de generalidad se supone que se desea hallar áreas urbanas, pero puede ser redefinido para obtener áreas de cualquier tipo. Los siguientes datos de entrada deben ser especificados:

1. Un criterio de selección  $T_R$ , correspondiente a la clase de área que se desea encontrar.
2. Un umbral  $T_S$  que corresponde al mínimo número de bloques requeridos para considerar una zona candidata, como región inicial. Se toman aquellas zonas candidatas que tengan al menos  $T_S$  bloques conectados.

El algoritmo comienza estimando los parámetros  $\alpha$  y  $\gamma$  a partir de los datos de la imagen en cada bloque, obteniendo dos arreglos  $\hat{\alpha}$  y  $\hat{\gamma}$ , cada uno de tamaño  $m \times n$ , con  $\hat{\alpha}(i, j)$  y  $\hat{\gamma}(i, j)$ , los estimadores de los parámetros  $\alpha$  y  $\gamma$ , en el bloque  $(i, j)$ ,  $0 \leq i \leq m - 1$ ,  $0 \leq j \leq n - 1$ , respectivamente. Luego toma como zonas candidatas las regiones formadas por bloques cuyo parámetro estimado  $\hat{\alpha}$  pertenece al intervalo de selección  $T_R$ .

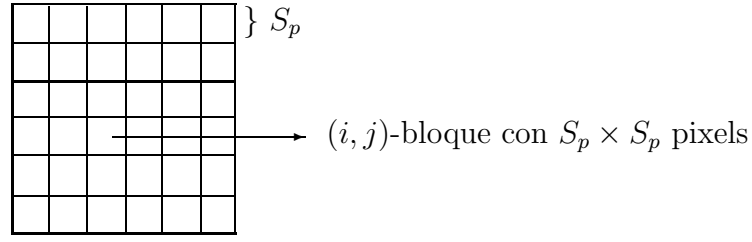


Figura 5.1: Partición de la imagen en bloques cuadrados para estimar los parámetros  $\alpha$  y  $\gamma$ .

Si el número de bloques conectados de una zona candidata es menor que  $T_S$ , entonces la zona se considera errónea y se remueve. Luego, se calcula el polígono convexo que contiene a los bloques conectados. En este trabajo hemos usado  $T_R = [-3, -0.5)$ ,  $T_S = 46$  y  $S_p = 5$ . El Algoritmo 2 muestra el procedimiento descrito para encontrar regiones iniciales automáticamente. Nótese que la salida del Paso 3 es una imagen binaria (por ejemplo, urbana-no urbana). Finalmente, cada zona de interés se especifica por un polígono cuyos vértices son los puntos de control que generan una curva B-Spline. El Algoritmo 2 se aplica a la imagen sintética de la Figura 3.10 y a la imagen SAR real de la Figura 2.4. Los resultados se presentan en la Figura 5.2 y en la Figura 5.3.

---

**Algoritmo 2** Regiones Iniciales

---

- 1: Realizar una partición de la imagen en bloques cuadrados de lado  $S_p$ , como muestra la Figura 5.1.
  - 2: Estimar los parámetros  $\alpha$  y  $\gamma$  a partir de los datos de la imagen en cada bloque. Se obtienen dos arreglos  $\hat{\alpha}$  y  $\hat{\gamma}$ , cada uno de tamaño  $m \times n$ , con  $\hat{\alpha}(i, j)$  y  $\hat{\gamma}(i, j)$ , los estimadores de  $\alpha$  y  $\gamma$ , en el bloque  $(i, j)$ ,  $0 \leq i \leq m - 1$ ,  $0 \leq j \leq n - 1$ , respectivamente.
  - 3: Dado  $T_R \subset \mathbb{R}^-$  un criterio de selección, si  $\hat{\alpha}(i, j) \in T_R$  entonces el bloque  $(i, j)$  se marca como zona candidata, si no se deja sin marcar.
  - 4: Dado  $T_S$ , el mínimo número de bloques requeridos para considerar una zona candidata como región inicial. Para cada zona candidata se calcula el número  $b$ , como la cantidad de bloques conectados en la zona. Entonces, si  $b \geq T_S$  la zona se marca como región inicial, si no se remueve.
  - 5: Las regiones iniciales están formadas por bloques conectados. Luego se calcula el polígono convexo que contiene a cada una.
- 

Una vez determinada cada una de las zonas de búsqueda inicial como una curva B-Spline calculamos el centroide de cada una de ellas.

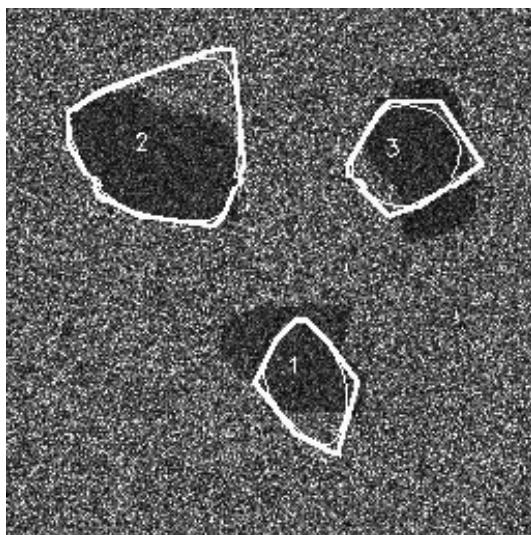


Figura 5.2: Zonas de interés especificadas por sus puntos de control, calculadas automáticamente usando el Algoritmo 2. Las líneas gruesas son el polígono de control, las líneas finas son la B-Spline de orden 3 correspondiente.



Figura 5.3: Zonas de interés en una imagen real, calculadas automáticamente usando el Algoritmo 2.

## 5.2. Proceso de detección de bordes

Si un punto pertenece al borde del objeto entonces en un entorno de ese punto existe un cambio en los parámetros estadísticos de la muestra y por lo tanto es un punto de



transición. Se consideran  $N$  segmentos sobre la imagen,  $s^{(i)}$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , de la forma  $s^{(i)} = \overline{CP_i}$  donde  $C$  es el centroide de la región inicial, el extremo  $P_i$  es un punto fuera de la región y  $\theta_i = \text{ang}(s^{(i)}, s^{(i+1)}) \forall i$  es el ángulo entre dos segmentos sucesivos, como muestra la Figura 5.4.

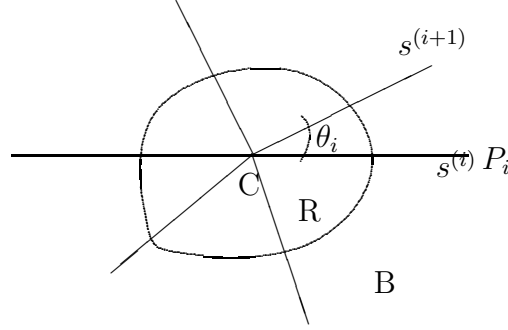


Figura 5.4: Rectas radiales separadas por un ángulo  $\theta_i$ .

Consideramos  $k+1$  parámetros:  $(\alpha_0, \gamma_0)$  correspondiente al fondo y  $(\alpha_j, \gamma_j)$   $j = 1, \dots, k$  correspondientes a cada una de las regiones.

El segmento  $s^{(i)}$  es un arreglo cuyos elementos provienen de la discretización de la línea sobre la imagen.

$$s^{(i)} = (z_1^{(i)}, \dots, z_m^{(i)}), \quad (5.1)$$

Dado un segmento  $s^{(i)}$  consideramos la siguiente partición

$$Z_k^{(i)} \sim \mathcal{G}^0(\alpha_r, \gamma_r), \quad k = 1, \dots, j \quad (5.2)$$

$$Z_k^{(i)} \sim \mathcal{G}^0(\alpha_b, \gamma_b), \quad k = j+1, \dots, m, \quad (5.3)$$

donde para cada  $k$ ,  $z_k^{(i)}$  es la realización de la variable aleatoria  $Z_k^{(i)}$ . Los parámetros  $(\alpha_r, \gamma_r)$  y  $(\alpha_b, \gamma_b)$  caracterizan a la región y al fondo, respectivamente y se estiman como se explica en la sección 5.3. Para encontrar los puntos de transición sobre cada segmento, consideramos una función  $\ell$  para cada segmento  $s^{(i)}$ , donde  $\ell$  es una función de verosimilitud de la muestra, dada por:

$$\ell(z, \alpha_r, \gamma_r, \alpha_b, \gamma_b) = \prod_{i=0}^j fr(z_i; \alpha_r, \gamma_r) \prod_{i=j+1}^m fr(z_i; \alpha_b, \gamma_b)$$

Para encontrar el punto de transición, maximizamos  $L = \ln \ell$ :

$$L(z, \alpha_r, \gamma_r, \alpha_b, \gamma_b) = \sum_{i=0}^j \ln(f_{\mathcal{G}^0}(z_i; \alpha_r, \gamma_r)) + \sum_{i=j+1}^m \ln(f_{\mathcal{G}^0}(z_i; \alpha_b, \gamma_b));$$

entonces, de acuerdo a la ecuación (3.12),

$$\begin{aligned} L(z, \alpha_r, \gamma_r, \alpha_b, \gamma_b) = & \sum_{i=0}^j \ln \left( \frac{2n^n \Gamma(n - \alpha_r) z_i^{2n-1}}{\gamma_r^{\alpha_r} \Gamma(-\alpha_r) \Gamma(n) (\gamma_r + n z_i^2)^{n-\alpha_r}} \right) + \sum_{i=j+1}^m \ln \left( \frac{2n^n \Gamma(n - \alpha_b) z_i^{2n-1}}{\gamma_b^{\alpha_b} \Gamma(-\alpha_b) \Gamma(n) (\gamma_b + n z_i^2)^{n-\alpha_b}} \right). \end{aligned}$$

Finalmente, la estimación del índice  $\hat{j}$  que corresponde al punto de borde  $b_i$ , sobre el segmento  $s^{(i)}$  está dado por:

$$\hat{j} = \arg \max_j L \quad (5.4)$$

En la Figura 5.5(a) se muestran valores típicos de la función objetivo, tomados a lo largo de un segmento de recta. La posición correspondiente al máximo se considera como el punto de transición entre ambas regiones, de acuerdo con la fórmula (5.4). Los datos de la imagen sobre el mismo segmento de recta se muestran en la Figura 5.5(b). En la Figura 5.5(c) se muestra el valor del parámetro  $\alpha$  estimado pixel a pixel, para los datos sobre el mismo segmento de recta. Puede observarse que el punto de transición coincide con el punto de discontinuidad en la posición de los datos y con el punto de discontinuidad en la estimación del parámetro  $\alpha$ . La estimación del parámetro  $\alpha$  pixel a pixel se explica en la sección 6.3.

El Algoritmo 3 muestra el resumen de este proceso de detección de bordes.

---

**Algoritmo 3** Algoritmo de detección de bordes maximizando la probabilidad

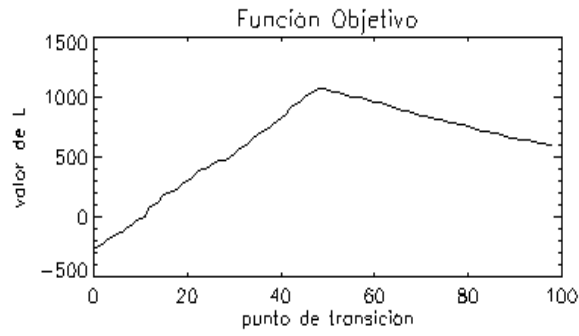
---

- 1: Determinación automática de la región de interés por medio de una curva B-Spline, usando el Algoritmo 5.
  - 2: Determinación de una serie de segmentos radiales sobre la imagen, como muestra la Figura 5.4.
  - 3: **for** cada segmento  $s^{(i)}$  **do**
  - 4:   Estimación de los parámetros estadísticos relevantes para datos con ruido speckle.
  - 5:   Hallar la posición  $\hat{j}$  sobre el segmento  $s^{(i)}$  que maximiza la Ecuación 5.4 y que corresponde al punto de borde  $b_i$  sobre la imagen.
  - 6: **end for**
  - 7: Construir la curva B-Spline que interpola los puntos encontrados.
- 

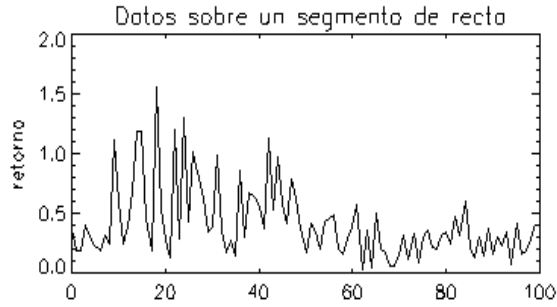
### 5.3. Muestras para estimar los parámetros

Estimamos los parámetros estadísticos procesando los pixels dentro de una ventana rectangular de manera que la dirección de su eje mayor coincida con la del segmento que se está procesando y tal que incluya una muestra de la región y otra del fondo, las cuales se utilizan para estimar los parámetros  $(\alpha_r, \gamma_r)$  y  $(\alpha_b, \gamma_b)$ , respectivamente. En la Figura 5.6 puede observarse el segmento  $s^{(i)}$ , el centroide  $C$ , la región  $R$  y el fondo de la imagen,  $B$ . Las zonas rectangulares interiores a la ventana corresponden a los sectores de la ventana rectangular, donde se toman las muestras de entrenamiento que son utilizadas para estimar los parámetros. Estos sectores son elegidos en los extremos de la ventana para asegurar que los valores de los parámetros correspondan a distintas zonas de la imagen.

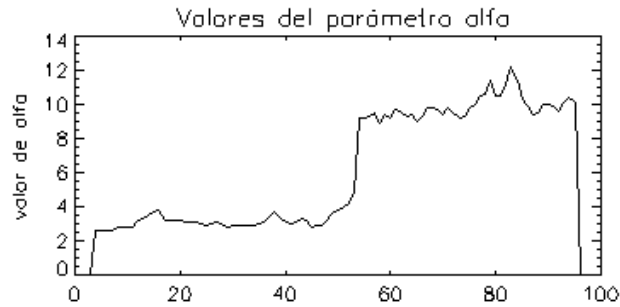
En el caso en que la ventana rectangular esté totalmente incluida dentro de la región, o totalmente incluida en el fondo, entonces los parámetros estimados no corresponden



(a) Valores típicos de la función objetivo para un segmento de recta.



(b) Valores de los datos de la imagen para un segmento de recta.



(c) Valores de la estimación del parámetro  $\alpha$  pixel a pixel sobre un segmento de recta.

Figura 5.5: Gráficos que muestran distintas maneras de visualizar la posición del punto de transición sobre una recta. Como el máximo de la función de probabilidad (a), como el punto de discontinuidad en la posición de los datos (b) y como el punto de discontinuidad en el valor del parámetro  $\alpha$  (c).

a distintas regiones y el proceso de encontrar los puntos del borde  $\{b_1...b_N\}$  debe ser replanteado buscando otra posición para el centro de la ventana.

Con el objetivo de encontrar posiciones de la ventana rectangular que contengan al punto de borde, el algoritmo desarrollado utiliza el punto de borde encontrado en el paso anterior para ubicar la ventana rectangular del paso actual. En el paso  $i$  la ventana se

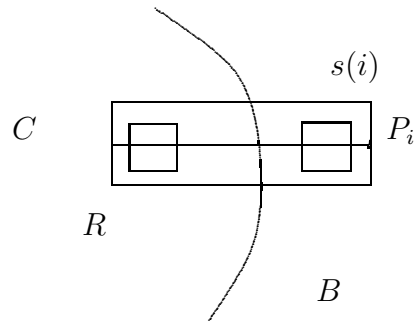


Figura 5.6: Ventana rectangular utilizada para estimar los parámetros.

ubica a distancia  $d_{i-1} = |c - b_{i-1}|$  desde el centroide, sobre el segmento  $s^{(i)}$ . La Figura 5.7 muestra un ejemplo de la forma de ubicar la ventana. De esta manera, si el ángulo entre dos segmentos de recta es pequeño, entonces la ventana correspondiente al paso posterior estará ubicada en un punto tal que el borde del objeto quedará incluido dentro de la ventana.

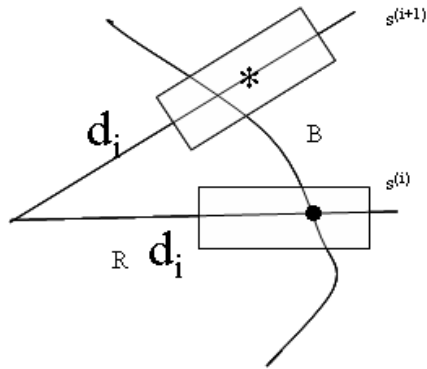


Figura 5.7: Esquema que muestra la forma en que se ubica la ventana rectangular en cada paso. Sobre el segmento  $s^{(i+1)}$ , el centro de la ventana se ubica a distancia  $d_i$  desde el centroide.

En el primer paso, debe elegirse automáticamente el primer punto de borde  $b_1$ .

Para solucionar esta dificultad desarrollamos un algoritmo que encuentra con precisión el primer punto  $b_1$ , que es muy importante porque es el punto en el cual se basa la búsqueda de todos los demás puntos de borde. El proceso se presenta en la siguiente sección.

## 5.4. Proceso de búsqueda del primer punto de borde $b_1$

Para definir el primer punto de borde se toman una serie de elementos  $q_1, \dots, q_{k_n}$  sobre el segmento  $s^{(1)}$ , separados una longitud arbitraria y se desplaza la ventana rectangular localizando su centro en estos puntos, como muestra la Figura 5.8. Para cada ventana, se obtienen muestras de entrenamiento para calcular los estimadores de los parámetros  $(\hat{\alpha}_r^j, \hat{\alpha}_b^j)$ ,  $j = 1, \dots, k_n$  y se estiman los parámetros para cada una de las muestras. Luego, se calcula  $d^j = |\hat{\alpha}_r^j - \hat{\alpha}_b^j|$ ,  $j = 1, \dots, k_n$  y  $d^{\max} = \max_{1 \leq j \leq k_n} d^j$ , la máxima diferencia entre los parámetros estimados y se almacena el índice que corresponde a este máximo. El valor maximal  $d^{\max}$  es la diferencia entre  $\hat{\alpha}_r^{\max}$  y  $\hat{\alpha}_b^{\max}$ . Estos valores se consideran estimadores óptimos y son utilizados para calcular el punto  $b_1$ . Se encuentra  $b_1$  con los parámetros calculados en el paso anterior usando la función de máxima verosimilitud dada en la ecuación 5.4.

Un resumen de este procedimiento, se presenta en el Algoritmo 4.

---

### Algoritmo 4 Primer punto de borde

---

- 1: Tomar una serie de puntos  $q_1, \dots, q_{k_n}$  sobre el segmento  $s^{(1)}$ , separados una longitud arbitraria, y desplazar la ventana rectangular localizando su centro en estos puntos, como muestra la Figura 5.8.
  - 2: Para cada ventana, obtener muestras de entrenamiento para calcular los estimadores de los parámetros  $(\hat{\alpha}_r^j, \hat{\alpha}_b^j)$ ,  $j = 1, \dots, k_n$ . Estimar los parámetros para cada una de las muestras.
  - 3: Hallar  $d^j = |\hat{\alpha}_r^j - \hat{\alpha}_b^j|$ ,  $j = 1, \dots, k_n$  y  $d^{\max} = \max_{1 \leq j \leq k_n} d^j$ , la máxima diferencia entre los parámetros estimados y almacenar el índice que corresponde a este máximo.
  - 4: Hallar  $b_1$  con los parámetros óptimos calculados en el paso 3 usando la función de máxima verosimilitud dada en la ecuación 5.4.
- 

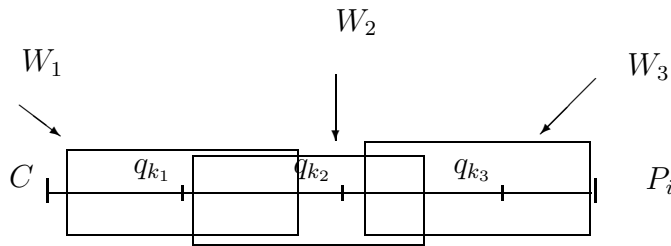


Figura 5.8: Desplazamiento de una ventana rectangular sobre un segmento de recta.

En la Figura 5.9 se muestra el resultado de aplicar el algoritmo anterior a la imagen sintética de la Figura 3.10. Las líneas finas corresponden a las regiones iniciales encontradas automáticamente con el algoritmo descrito en la sección 5.1. Las líneas gruesas

corresponden al contorno hallado con el procedimiento. Puede observarse la precisión de los resultados.

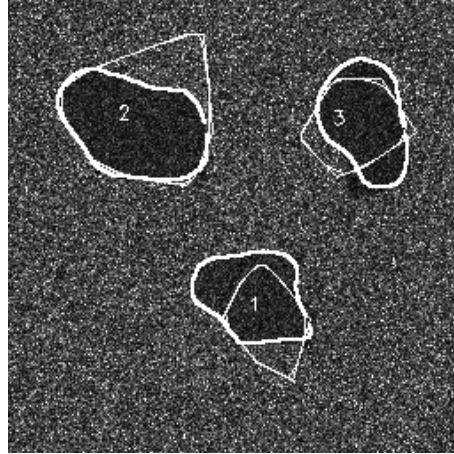


Figura 5.9: Resultado de aplicar el algoritmo propuesto a la imagen sintética de la Figura 3.10.

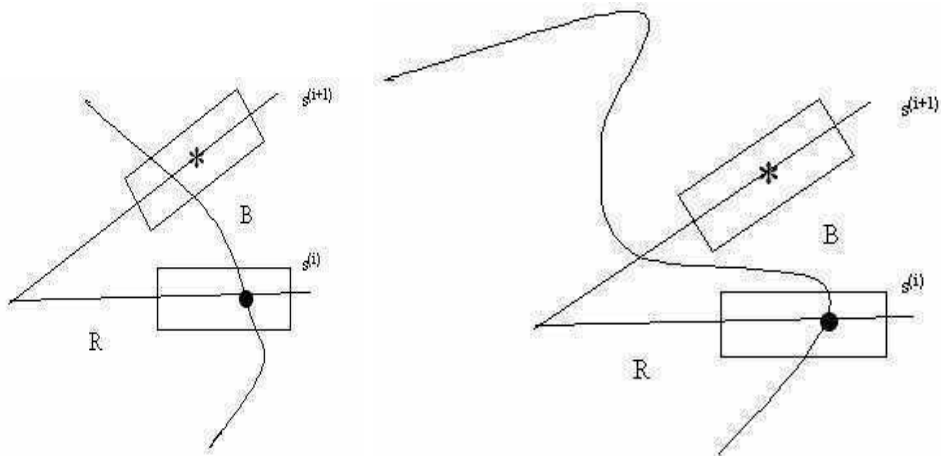
## 5.5. Problemas y Soluciones

Este algoritmo da muy buenos resultados cuando se trata de hallar el contorno de objetos convexos, pero el método puede fallar, cuando el objeto no es convexo. En la Figura 5.10 se muestra un esquema de esta situación en la que la ventana en el paso  $i + 1$  queda mal ubicada y el proceso de búsqueda de puntos de borde, falla. En la Figura 5.10(a) se observa que la ventana está ubicada con su centro en un punto tal que el borde del objeto queda dentro de la ventana. En la Figura 5.10(b) se ve que si el borde del objeto tiene una gran variación en la curvatura, esto provoca que el punto donde es ubicado el rectángulo para tomar la muestra sea muy lejano al borde del objeto y por lo tanto el punto de transición no queda en el interior de la ventana. En la Figura 5.11 se muestra un ejemplo de esto con una imagen sintética generada con el modelo  $\mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, n)$  con los mismos parámetros que la Figura 3.10.

Es posible también que una recta radial tenga múltiples cruces, como muestra la Figura 5.12. En este caso el algoritmo encuentra solamente uno de los puntos de borde sobre la recta. Los otros son ignorados y el proceso falla.

Con el objetivo de solucionar estos problemas, desarrollamos otro algoritmo que encuentra el borde de un objeto no convexo y que resuelve los inconvenientes anteriores de manera adecuada. Este algoritmo no necesita que el centroide de la región inicial esté dentro del objeto y tolera un paso de inicialización muy lejano a la solución final. El proceso se basa en que, teniendo dos puntos en el borde del objeto  $b_i$  y  $b_{i+1}$  sobre dos diferentes rectas radiales, calcula el vector velocidad entre éstos dos puntos, usando la fórmula:

$$\vec{v}_i = \frac{b_{i+1} - b_i}{\|b_{i+1} - b_i\|}$$



(a) La ventana rectangular ubicada de manera que el punto de borde queda dentro de ella. (b) Si el borde posee gran variación en la curvatura, entonces la ventana rectangular puede quedar mal ubicada.

Figura 5.10: Esquema que muestra que el procedimiento puede fallar, dependiendo de la forma del objeto del cual se desea encontrar el contorno.

para luego localizar la ventana en la dirección del segmento perpendicular a  $\vec{v}_i$  con centro  $b_i + \lambda \vec{v}_i$ , donde  $\lambda$  es un valor arbitrario. La Figura 5.13 muestra un esquema del procedimiento en el paso  $i$ . En este ejemplo, a partir de los puntos de borde  $b_{i-1}$  y  $b_i$  se calcula el punto  $b_{i+1}$ . Luego, encuentra cada punto de borde como lo hace el Algoritmo 3. Un resumen de este procedimiento se presenta en el Algoritmo 5.

---

**Algoritmo 5** Algoritmo de detección de bordes basado en el vector velocidad

---

- 1: Buscar dos puntos sobre el borde del objeto  $b_1, b_2$  sobre dos diferentes rectas radiales, como se explica en la sección 5.2.
- 2: Dados dos puntos sobre el borde del objeto  $b_i, b_{i+1}$ , calcular el vector velocidad entre éstos dos puntos:

$$\vec{v}_i = \frac{b_{i+1} - b_i}{\|b_{i+1} - b_i\|}$$

- 3: Localizar la ventana en la dirección del segmento perpendicular a  $\vec{v}_i$  con centro  $b_i + \lambda \vec{v}_i$ , donde  $\lambda$  es un valor arbitrario, como muestra la figura 5.13.
  - 4: Construir la curva B-Spline interpolando los puntos encontrados  $\{b_1, \dots, b_N\}$ .
-

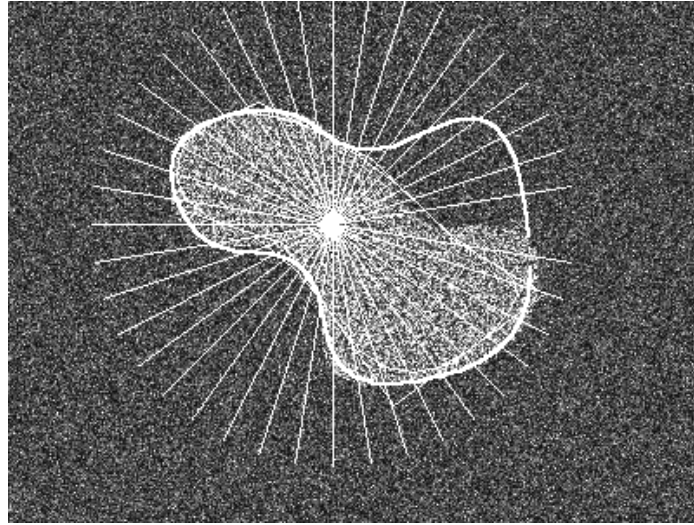


Figura 5.11: Objeto que tiene en una parte del contorno una gran variación en la curvatura y su contorno detectado.

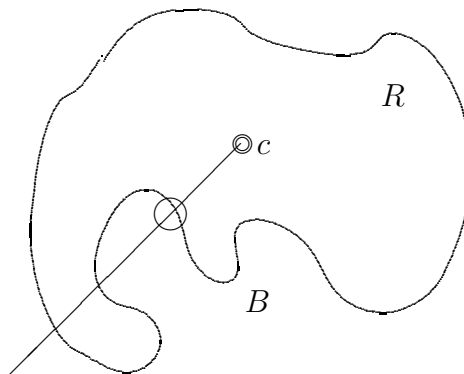


Figura 5.12: El procedimiento sobre una recta con múltiples cruces, solo detecta el punto de borde marcado con un círculo.



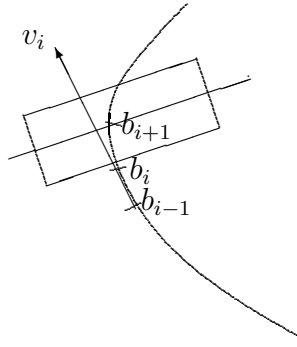


Figura 5.13: Vector de variación entre dos puntos de borde. (Paso 4 del Algoritmo 5)

La Figura 5.14 muestra el resultado de aplicar el algoritmo a la imagen sintética de la Figura 3.10. En este ejemplo se utilizaron tres tipos de inicialización, cruzando los bordes del objeto (arriba a la izquierda), dentro de la región (arriba a la derecha) y fuera de la región (abajo al medio). Se puede observar la precisión de los resultados en todos los casos.

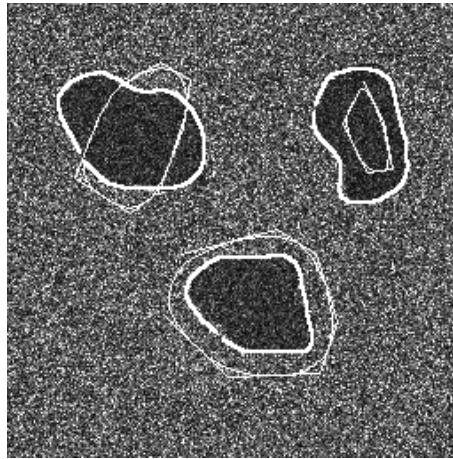


Figura 5.14: Resultado de aplicar el Algoritmo 5 a una imagen sintética con tres tipos distintos de inicialización. Las líneas finas corresponden a las regiones iniciales, las líneas gruesas a las curvas de ajuste halladas por el algoritmo.

La Figura 5.15 muestra el resultado de aplicar el Algoritmo 5 a la imagen de la Figura 5.11. Se observa que se solucionaron los problemas de ajuste de la curva al contorno del objeto.

La Figura 5.16 corresponde a una imagen sintética generada con la distribución  $\mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, 1)$ , con parámetros  $\alpha = -1,5$  y  $\gamma = 1,0$  para el objeto, y  $\alpha = -10$  y  $\gamma = 1,0$  para el fondo. El objeto tiene forma de 'S' y esto hace que tenga gran variación en la curvatura en todo punto del contorno. La línea gruesa muestra la curva encontrada por el algoritmo. Se observa un resultado muy satisfactorio, a pesar de que la curva inicial (marcada con una línea fina en la figura) es muy lejana a la solución final.

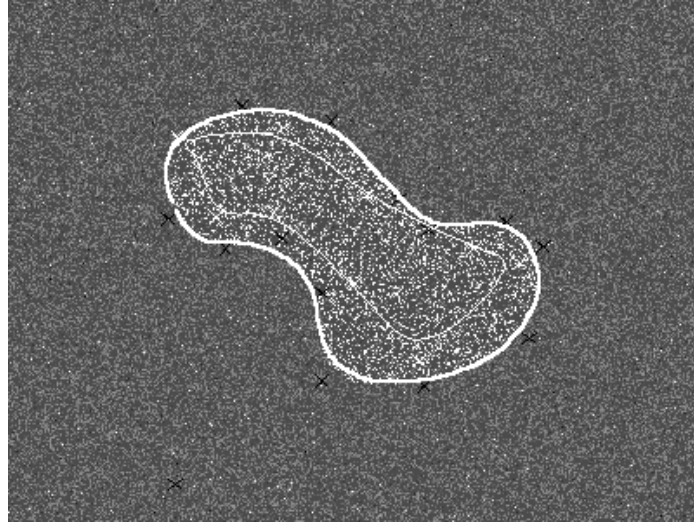


Figura 5.15: Resultado de aplicar el Algoritmo 5 a la imagen de la Figura 5.11.

## 5.6. Aplicación a datos reales

La Figura 5.17(a) muestra una imagen real de 1 look, obtenida por el sensor E-SAR sobre los alrededores de la ciudad de Munich, Alemania. La imagen muestra campos (áreas oscuras) y áreas urbanas (áreas brillantes). La Figura 5.17(b) muestra el resultado de aplicar el algoritmo a esta imagen. Las líneas finas corresponden a las regiones iniciales, las líneas gruesas corresponden a los bordes detectados. Las regiones iniciales fueron halladas usando el Algoritmo 2 de búsqueda de regiones iniciales de la sección 5.1.

La Figura 5.18 muestra el resultado de aplicar el algoritmo a la imagen JERS del Bosque Nacional Tapajos (Brasil), correspondiente a datos de amplitud, con polarización HH de 3 looks. Esta imagen es de un bosque que ha sido talado y tiene claros. La zona encontrada por el algoritmo corresponde a un claro. Los parámetros estimados son  $\alpha = -19,4$ ,  $\gamma = 74706$  para los claros y  $\alpha = -12,8$ ,  $\gamma = 178374$  para el bosque.

La Figura 5.19 muestra otros dos ejemplos de aplicación de los algoritmos a imágenes reales, las áreas oscuras corresponden a zonas homogéneas y las áreas luminosas a zonas heterogéneas. Las líneas gruesas corresponden al borde de la región encontrada por el método.

## 5.7. Conclusiones

En este capítulo se presenta un nuevo método de segmentación de imágenes SAR usando curvas B-Spline deformables y la distribución estadística  $\mathcal{G}_A^0$ . El método se basa en hallar borde de regiones con diferente grado de homogeneidad.

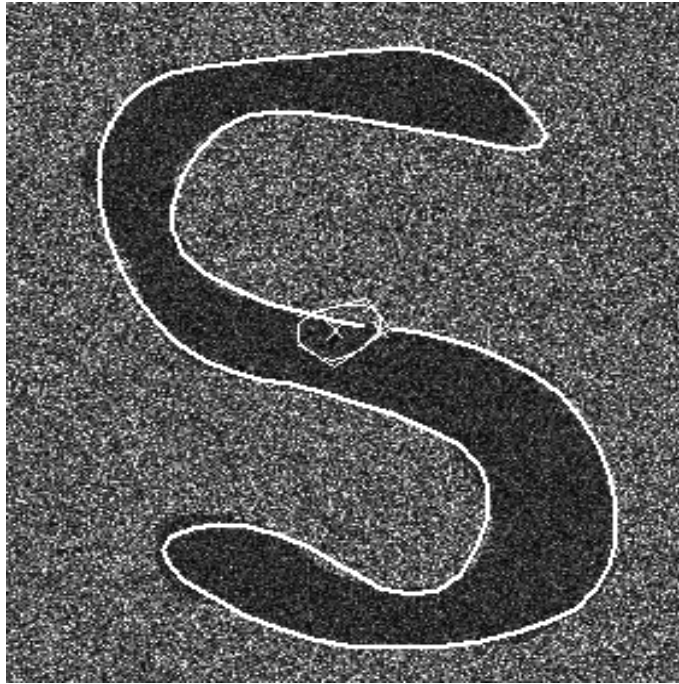
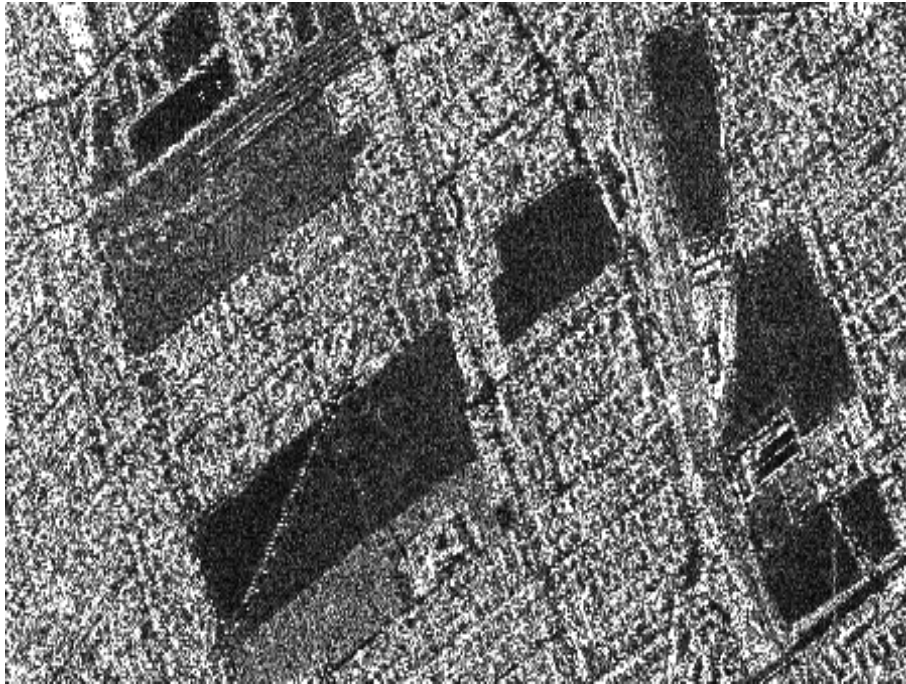


Figura 5.16: Resultado de aplicar el algoritmo de velocidad a una imagen sintética correspondiente a un objeto no convexo, con gran variación en la curvatura en todo punto.

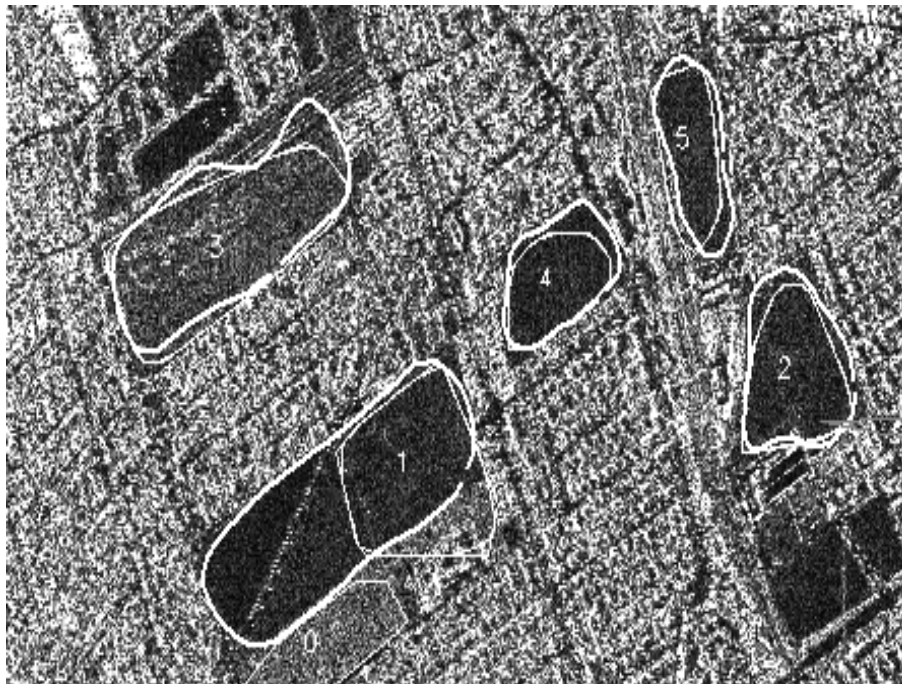
En el primer paso se encuentran automáticamente regiones iniciales correspondientes a áreas con diferentes grados de homogeneidad. Se modelan los datos bajo el modelo multiplicativo y la distribución  $\mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, n)$ , y se utiliza el parámetro  $\alpha$  como descriptor de la homogeneidad de una zona de la imagen.

En un entorno de cada región inicial se dispone una serie de segmentos de recta. Luego, se estiman los parámetros de rugosidad y escala usando dos muestras disjuntas, una incluida en el objeto y otra fuera del mismo. Con estas estimaciones de los parámetros se maximiza la función de verosimilitud para el conjunto de datos que yacen sobre cada segmento.

Este método presenta varias ventajas sobre los algoritmos clásicos, porque es totalmente automático, trabaja sobre regiones en lugar de hacerlo sobre toda la imagen y determina el contorno de diferentes objetos con precisión, obteniéndose una fórmula matemática que los describe. Para cada región, el resultado de aplicar el algoritmo es una curva que ajusta al borde del objeto, en la forma de una curva B-Spline determinada por puntos de control. Sin embargo, este algoritmo puede presentar problemas de convergencia que dependen de la forma del objeto que se desea encontrar. Entonces desarrollamos otro algoritmo que soluciona este inconveniente buscando los puntos de borde sobre segmentos de recta que se ubican en cada paso siguiendo la dirección de variación entre los dos puntos de borde encontrados en los pasos inmediatos anteriores. En cada paso se utiliza la posición del punto de borde encontrado en el paso anterior, por lo tanto la precisión del



(a) Imagen real, de 1 look en los alrededores de Munich.



(b) Detección de bordes de regiones en la imagen de Munich.

Figura 5.17: Resultado de aplicar el algoritmo completo a una Imagen SAR real. Las líneas finas corresponden a la región inicial encontrada automáticamente, las líneas gruesas corresponden a la curva que ajusta el contorno.

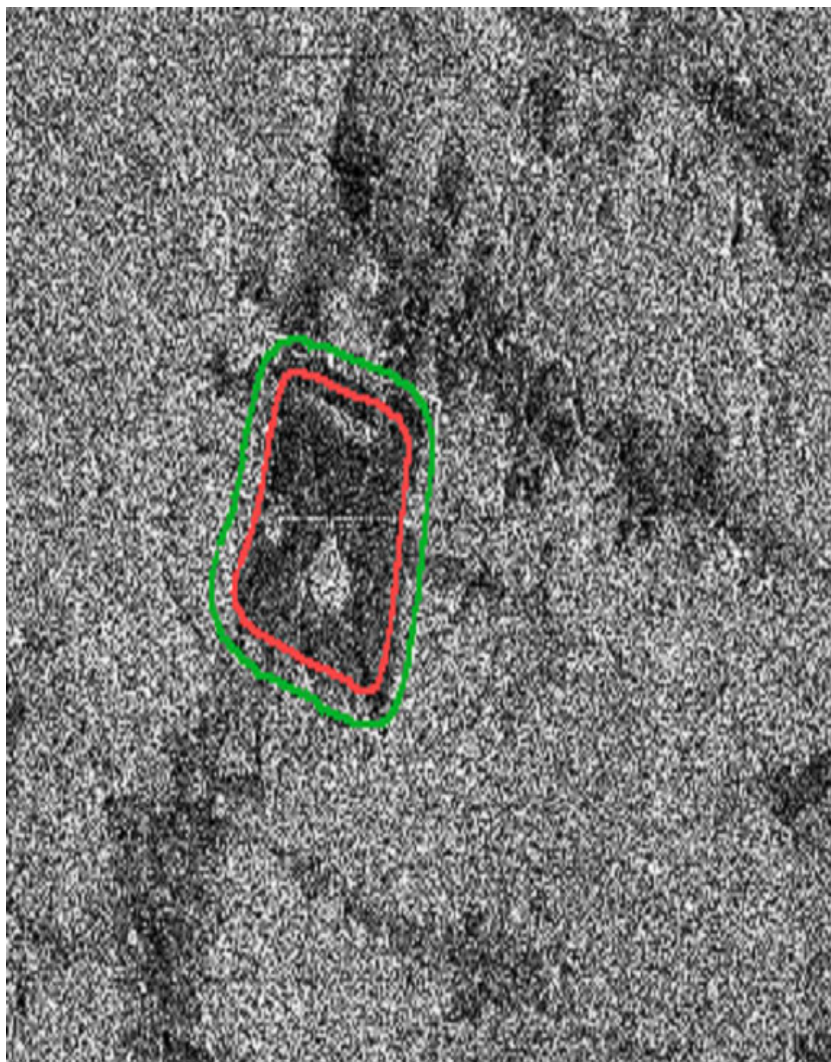


Figura 5.18: Resultado de aplicar el algoritmo completo a una Imagen SAR real de 3 looks, de una zona de bosque en Brasil. La curva verde corresponde a la región inicial, la roja a la curva de ajuste.



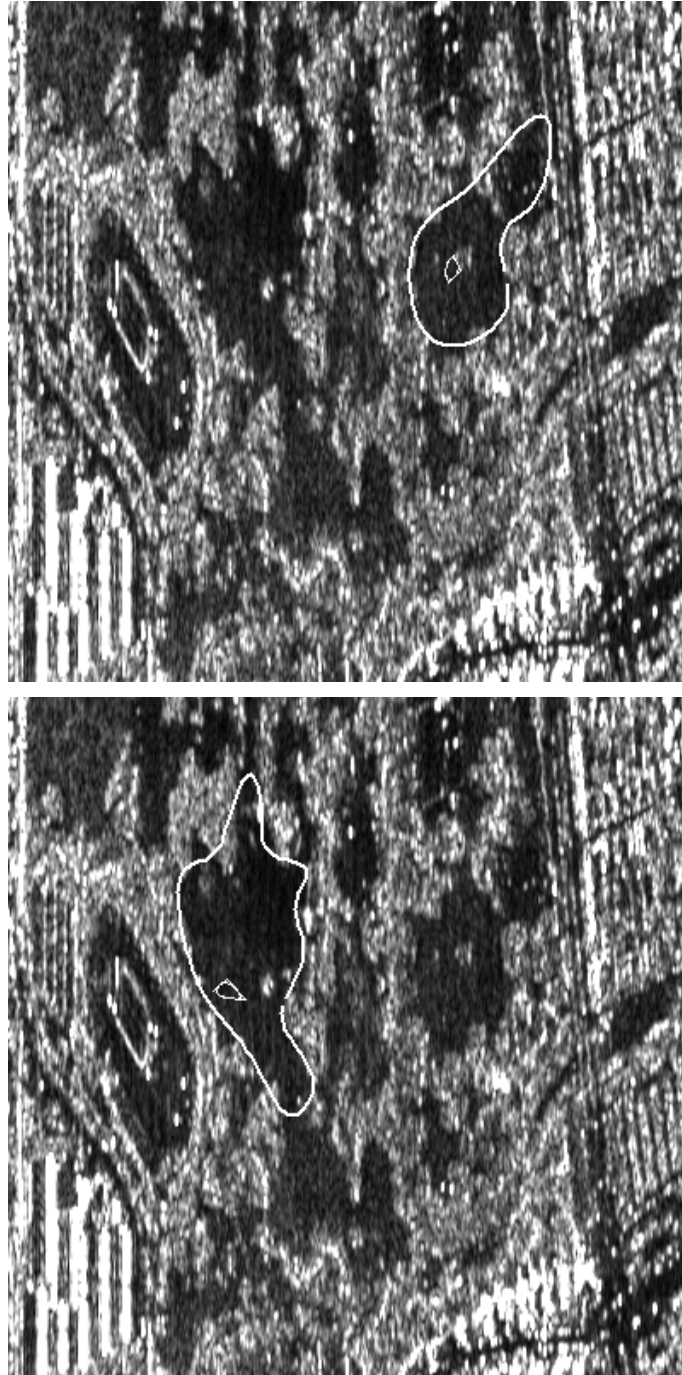


Figura 5.19: Resultado de aplicar el algoritmo a una imagen real donde el objetivo es una zona homogénea. Las líneas finas son las regiones iniciales, las gruesas corresponden a las líneas de ajuste encontradas por el algoritmo.

primer punto de borde es determinante para la convergencia del método. Por esa razón se presenta un algoritmo que permite encontrarlo con mayor precisión.

Este método se aplica en imágenes sintéticas y reales y se observa que los resultados son excelentes con un aceptable costo computacional.

## Capítulo 6

# Detección de contornos en imágenes SAR usando Difusión Anisotrópica

En esta tesis no se trata de eliminar el ruido *speckle*, sino de aprovechar sus propiedades estadísticas y utilizarlas como medio para hallar los contornos entre las diferentes regiones. Sin embargo, en la estimación de parámetros se producen errores provenientes de las operaciones y es necesario suavizar el arreglo de estimadores para encontrar el punto de discontinuidad con mayor precisión. En este capítulo utilizamos el método de difusión anisotrópica para el suavizado del mapa de parámetros porque elimina el ruido preservando los bordes y las discontinuidades.

El proceso de descripción de imágenes en múltiples escalas (o en el espacio-escala) fue utilizado por muchos autores desde los años 80. La idea fue inicialmente formalizada por Witkin [126] y luego desarrollada por Koendrik [65], Babaud et al. [4], Yuille et al. [132] y otros. En 1990, Perona y Malik presentan un algoritmo basado en el espacio-escala, que remueve el ruido manteniendo las características de borde y los detalles importantes de la imagen (ver [100]). La teoría basada en el espacio multiescala fue utilizada en segmentación y restauración de imágenes ópticas por diversos autores, por ejemplo en los artículos [1], [101] y [102].

También existen en la literatura algoritmos específicos para reducir el ruido *speckle*, basados en el método de difusión anisotrópica como por ejemplo los que se presentan en los artículos [129], [130], [131] y [119]. En este trabajo no han sido utilizados porque el objetivo es suavizar el mapa de estimación del parámetro  $\alpha$  de la distribución  $\mathcal{G}_A^0$ , que caracteriza a las diferentes regiones y encontrar los puntos de discontinuidad, que constituyen los puntos de borde sobre la imagen, en lugar de eliminar el ruido *speckle*.

Este capítulo está compuesto de la siguiente manera, en la sección 6.1 se explica el proceso de difusión isotrópica, en la sección 6.2 se introduce el proceso de difusión anisotrópica



y sus ventajas con respecto a la difusión isotrópica. En la sección 6.3 se presenta el algoritmo desarrollado para segmentación de imágenes SAR usando difusión anisotrópica para suavizar el vector de estimadores. En la sección 6.4 se muestran los resultados y finalmente en la sección 6.5 se presentan las conclusiones.

## 6.1. El proceso de difusión en procesamiento de imágenes

El problema de eliminar el ruido de una imagen ha sido tratado en la literatura de diversas maneras. Una forma interesante es el enfoque del espacio multiescala, desarrollado por Witkin (ver [126]) y más tarde formalizado por Koendrik [65]. El espacio multiescala consiste en aplicar una sucesión de filtros pasabajos de resolución decreciente. Una elección posible es el filtro gaussiano de desviación  $t$ , entonces la sucesión de filtros se realiza con  $t$  creciente. A medida que el parámetro  $t$  toma valores mayores, la eliminación del ruido es mayor, pero también aumentan la deformación de la imagen y la eliminación de características importantes y detalles. Por lo tanto es necesario buscar una relación de compromiso entre la eliminación de ruido y el borroneado de la imagen.

En forma más general, el espacio multiescala consiste en el siguiente proceso: dada la imagen  $I_0$  se genera iterativamente una familia de imágenes

$$I_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0 \quad (6.1)$$

que son una simplificación gradual de la imagen original. El número de iteraciones  $\lambda$  que se utiliza, es la escala. En cada iteración deben cumplirse los siguientes requerimientos:

1.  $I_\lambda \rightarrow I_0$  cuando  $\lambda \rightarrow 0$
2. A medida que se aumenta la escala, la resolución disminuye y por lo tanto, no deben generarse detalles no existentes en la imagen original.

En el ejemplo del espacio-escala gaussiano, la secuencia de imágenes se obtiene haciendo la convolución de la imagen original  $I_0(x, y)$  con núcleos gaussianos  $G(x, y, t)$  de varianza  $t$  y media 0, como muestran las ecuaciones 6.2 y 6.3,

$$I(x, y, t) = I_0(x, y) * G(x, y, t) \quad (6.2)$$

$$G(x, y, t) = \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2t^2}} \quad (6.3)$$

El parámetro del espacio-escala  $t$ , determina la intensidad del suavizado de la imagen. Para grandes valores de  $t$ , el suavizado es mayor. Usando propiedades de la transformada de Fourier, puede verse que la ecuación 6.2 es un filtro pasabajo que atenúa las altas frecuencias. Por el teorema de la convolución se tiene que para una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}(f * G_t)(w) = \mathcal{F}(f)(w) \cdot \mathcal{F}(G_t)(w) \quad (6.4)$$

donde  $G_t$  es el núcleo gaussiano de varianza  $t$ .

Además,

$$\mathcal{F}(G_t)(w) = e^{-\frac{|w|^2}{2t}} \quad (6.5)$$

que también tiene forma gaussiana, lo cual indica que convolucionar con un filtro gaussiano atenúa las altas frecuencias. Para más detalles ver [125].

Es posible también entender este comportamiento de suavidad observando la ecuación del calor. Como explican Koendrik [65] y Weickert [125], este conjunto de filtros de imágenes es equivalente a resolver la ecuación del calor

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} I(x, y, t) = \text{div}(c \nabla I(x, y, t)) \\ I(x, y, 0) = I_0(x, y) \end{cases}$$

donde  $I_0(x, y)$  es la imagen original que se desea suavizar,  $t$  representa al tiempo que se deja correr el algoritmo, siendo  $t \geq 0$ ,  $\nabla I$  es la imagen gradiente y  $\text{div}(u, v)$  corresponde a la divergencia del vector  $(u, v)$ , definido como

$$\text{div}(u(x, y), v(x, y)) = u_x + v_y$$

y  $c$  es el coeficiente de difusión del calor, siendo en este caso  $c = 1$ .

Este resultado es muy importante porque proporciona un conjunto de herramientas para eliminación de ruido, basadas en la resolución de ecuaciones diferenciales.

La temperatura de un cuerpo tiende a uniformizarse con el paso del tiempo, esto explica que la evolución de una imagen según la ecuación del calor, elimina el ruido ya que los niveles de gris tienden a uniformizarse en cada iteración.

Este enfoque tiene las siguientes limitaciones:

1. No sólo remueve el ruido de la imagen sino también las características importantes, como bordes y las hace más difícil de identificar. Un análisis detallado de este problema se presenta en [13].
2. Cuando el valor de  $t$  es muy grande, los bordes cambian de lugar. Esto fue demostrado por Witkin en el artículo [126].

En 1990, Perona y Malik presentan un algoritmo basado en ecuaciones diferenciales, en el que se buscan ecuaciones del calor manipulando el coeficiente de conducción. Este método llamado de difusión anisotrópica, remueve el ruido manteniendo las características de borde. Esta propuesta se discute en la sección 6.2.

## 6.2. Difusión Anisotrópica

La formulación de Perona-Malik [100] presenta un algoritmo que remueve el ruido manteniendo las características de borde. En ese trabajo los autores proponen hacer el

suavizado en el interior de cada región de la imagen, delimitada por los bordes y no suavizar a través de ellos. Se trata de encontrar soluciones de una ecuación del calor, que posee un coeficiente de conducción variable. Este algoritmo modifica iterativamente la imagen de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} \frac{\partial I(x,y,t)}{\partial t} = \text{div}(c(x,y,t)\nabla I) \\ I(x,y,0) = I_0(x,y) \end{cases} \quad (6.6)$$

igual que en el caso anterior,  $I_0(x,y)$  es la imagen original,  $t \geq 0$ ,  $\nabla I$  es la imagen gradiente y  $\text{div}(u,v)$  corresponde a la divergencia del vector  $(u,v)$ , definido como

$$\text{div}(u(x,y), v(x,y)) = u_x + v_y.$$

La ecuación 6.6 corresponde a la ecuación del calor, pero con un coeficiente de conducción del calor variable.

Cuando  $c(x,y,t) = 1$  la ecuación corresponde a la ecuación del calor y el proceso de difusión es isotrópico.

Si supiéramos la ubicación de los bordes de una región  $R$ , entonces haríamos que el coeficiente de conducción sea

$$c(x,y,t) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \notin \partial R \\ 0 & \text{si } (x,y) \in \partial R \end{cases} \quad (6.7)$$

donde  $R$  es la región de la cual se desea encontrar el borde. Por supuesto, esta información no está disponible, por lo tanto hay que aproximarla. Es necesario entonces utilizar un descriptor de la presencia de un borde; una elección posible es la magnitud del gradiente de la imagen  $\|\nabla I\|$ .

Entonces, se toma

$$c(x,y,t) = g(\|\nabla I\|)$$

donde la función  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  debe elegirse de manera que valga cero para valores grandes de  $\|\nabla I\|$  y valga 1, difundiendo completamente, cuando el valor del gradiente es bajo. Esto es equivalente a tomar la función  $g$  con las siguientes restricciones:

1.  $g$  decreciente.
2.  $g(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \infty$ .
3.  $g(x) \rightarrow 1$  cuando  $x \rightarrow 0$ .

De esta forma se obtiene un operador de detección de bordes. Si  $\|\nabla I\|$  es un número grande, indica la presencia de un borde. En este caso el valor de  $g(\|\nabla I\|)$  está cerca de cero y por lo tanto  $c(x,y,t)$  tiene menor peso en la ecuación y el suavizado es menor en esa zona de la imagen. De la misma manera si no se está en presencia de un borde,

entonces la magnitud del gradiente de la imagen en ese pixel tiene poco valor, luego el valor de  $g(\|\nabla I\|)$  está cerca de 1 y por lo tanto el coeficiente de difusión tiene más peso y el suavizado es mayor en esa zona de la imagen. La escala está dada por el tiempo  $t$  que se deja evolucionar la difusión.

Algunas elecciones clásicas para la función  $g(x)$  son:

- la función de Lorentz:

$$g(\|\nabla I\|) = \frac{1}{1 + \frac{\|\nabla I\|^2}{2\sigma^2}} \quad (6.8)$$

- la función de Leclerc

$$g(\|\nabla I\|) = e^{-\frac{\|\nabla I\|^2}{2\sigma^2}} \quad (6.9)$$

El parámetro  $\sigma$  se elige arbitrariamente.

La Figura 6.1, muestra el gráfico de la función de Lorentz para distintos valores de  $\sigma$ . La Figura 6.2 muestra el gráfico de la función de Leclerc para distintos valores de  $\sigma$ .

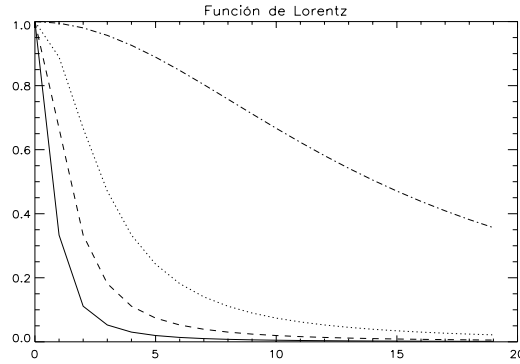


Figura 6.1: Gráficos de la función de Lorentz, para  $\sigma = \frac{1}{2}, 1, 2$  y  $10$  (sólida, raya, punto y raya-punto), respectivamente.

Se observa que en ambos casos se cumplen las restricciones 1, 2 y 3. Se observa que cuanto mayor es el valor del parámetro  $\sigma$ , los operadores se acercan a 0 más lentamente. Esto significa que a medida que el valor de  $\sigma$  crece, el suavizado resulta más intenso.

La Figura 6.3 y la Figura 6.4 muestran el resultado de aplicar el algoritmo de difusión isotrópica y anisotrópica, respectivamente. El algoritmo se aplica a la imagen de la Figura 3.10, para distintos valores de  $t$ , usando el operador de Leclerc. Puede observarse que en el primer caso, de la difusión isotrópica se borrarían bordes y detalles mucho más que en el caso de difusión anisotrópica.

Esta formulación posee la ventaja de que es muy fácil su implementación. En el Apéndice D se muestra el algoritmo para implementar este método.

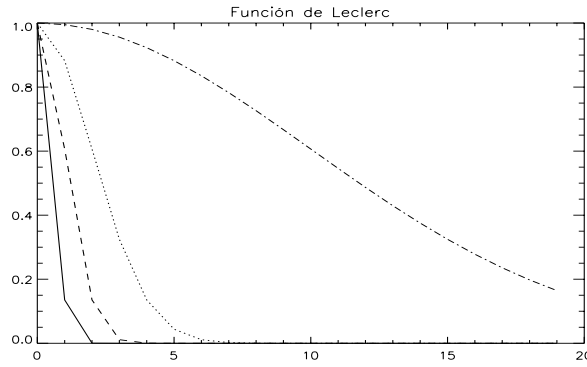


Figura 6.2: Gráficos de la función de Leclerc para valores de  $\sigma = 1/2, 1, 2$  y  $10$  (sólida, raya, punto y raya-punto), respectivamente.

### 6.3. Segmentación de imágenes SAR usando Difusión Anisotrópica y contornos deformables

En esta sección adaptamos los algoritmos presentados en el capítulo 5 para el desarrollo de un método que detecte bordes en la imagen, utilizando la distribución  $\mathcal{G}_A^0$  para modelar los datos y difusión anisotrópica para suavizar el ruido de las estimaciones. Se genera un vector de estimadores del parámetro  $\alpha$  para cada pixel de un segmento de recta sobre la imagen. Luego, se aplica el algoritmo de difusión anisotrópica a este vector de estimaciones de parámetros para encontrar la posición del punto de transición sobre el segmento con mayor precisión.

En el método propuesto en el capítulo 5, se plantea una región de interés y se traza el conjunto de segmentos de la imagen sobre los cuales se desea encontrar los puntos de borde. Para encontrar el punto de transición sobre cada segmento, estimamos los parámetros  $(\alpha_r, \gamma_r)$  y  $(\alpha_b, \gamma_b)$  que caracterizan las distintas regiones, como se explica en la sección 3.4.1. Luego se maximiza la función de verosimilitud para encontrar la posición del punto de transición sobre cada segmento de recta, que corresponden a los puntos pertenecientes al borde de la región.

Otra forma de encontrar el punto de transición sobre un segmento de recta es estimar el parámetro  $\alpha$  para cada pixel del segmento  $s^{(i)}$ , por medio de una ventana deslizante. Entonces se obtiene un arreglo  $\hat{\Lambda}^{(i)} = [\hat{\alpha}_1^{(i)}, \dots, \hat{\alpha}_m^{(i)}]$  de estimaciones del parámetro  $\alpha$ . Si un punto pertenece al borde de la región, entonces en una vecindad de ese punto existe un cambio brusco en los valores de los estimadores del parámetro  $\alpha$  y por lo tanto es un punto de discontinuidad. Luego se busca la posición del arreglo donde ocurre la máxima discontinuidad entre estos datos, el cual corresponde al punto de transición.

El proceso para encontrar el punto de borde con el método de buscar la máxima discontinuidad (MMD) se muestra en el Algoritmo 6.

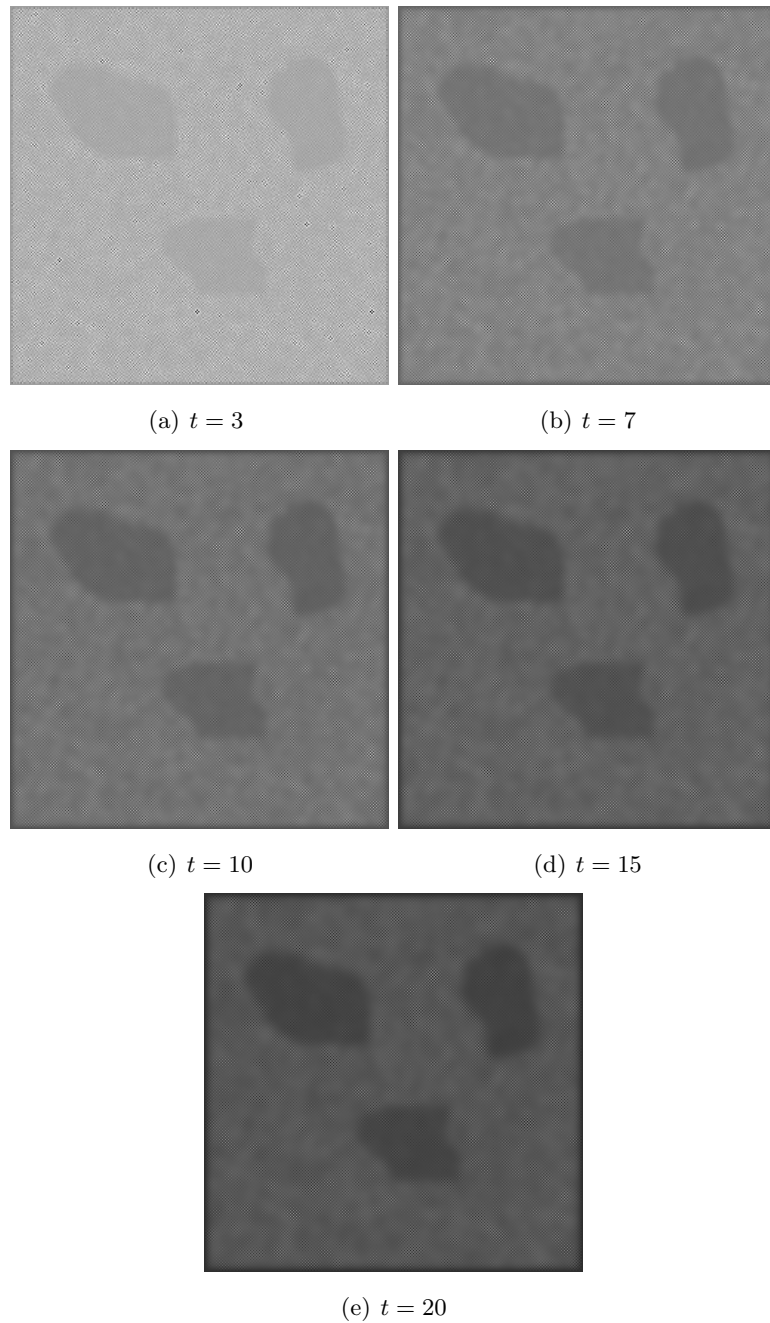


Figura 6.3: Imagen SAR sintética generada con la distribución  $\mathcal{G}$ , suavizada con difusión isotrópica para distintos valores de  $t$ .

Este método acarrea muchos errores de cálculo y además para que la estimación sea precisa deben tomarse ventanas deslizantes de muchos pixels, lo cual incrementa mucho el costo de computacional.

Una forma de mantener el compromiso entre la precisión en la estimación del parámetro y el costo computacional, es utilizar una ventana de tamaño  $9 \times 9$  pixels, y luego aplicar un algoritmo de suavizado al vector de estimaciones. De esta manera, el punto de borde se encuentra con mayor precisión. Luego, se aplica el algoritmo de difusión anisotrópica

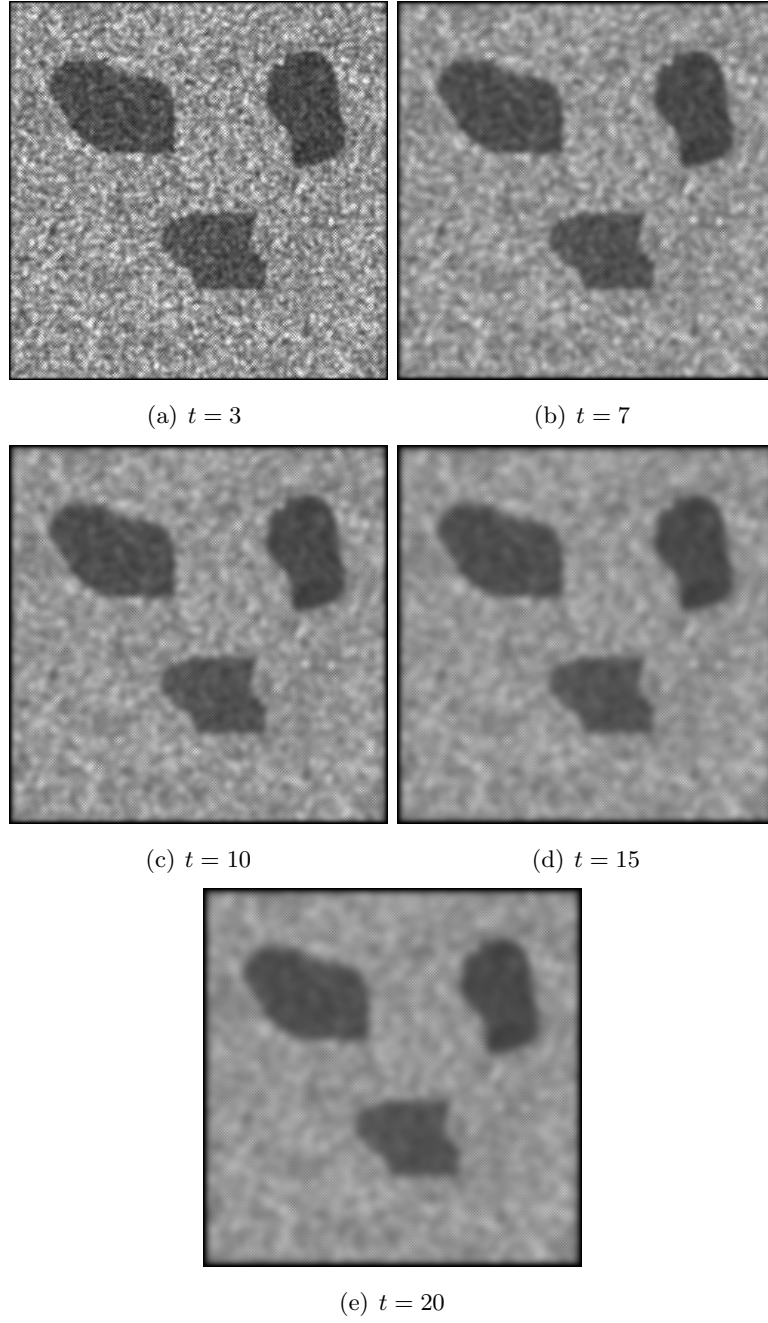


Figura 6.4: Imagen SAR sintética generada con la distribución  $\mathcal{G}$ , suavizada con Difusión Anisotrópica para distintos valores de  $t$ , en todos los casos se ha utilizado  $\sigma = 100$ .

para suavizar y luego encontrar el punto de discontinuidad sobre el segmento de recta convolucionando con un operador de detección de bordes clásico. La posición del punto de discontinuidad corresponde al punto de borde. El esquema del procedimiento se muestra en el Algoritmo 7.

---

**Algoritmo 6** Algoritmo para encontrar puntos de borde hallando la máxima discontinuidad del parámetro  $\alpha$

---

- 1: **for** Cada segmento  $s^i$  **do**
  - 2:   Estimar el parámetro  $\alpha$  para cada pixel del segmento  
deslizandando una ventana. Esto genera un arreglo  
 $\hat{\Lambda}^{(i)} = [\hat{\alpha}_1^{(i)}, \dots, \hat{\alpha}_m^{(i)}]$  de valores de  $\alpha$  estimados.
  - 3:   Hallar la posición sobre el segmento donde se encuentra la  
máxima discontinuidad entre los valores del arreglo  $\hat{\Lambda}^{(i)}$   
convolucionando con la máscara  $[-2, -1, 0, 1, 2]$ .
  - 4:   El punto de discontinuidad corresponde al punto de transición.
  - 5: **end for**
- 

## 6.4. Resultados

El Algoritmo 7 se aplica a la imagen sintética que se muestra en la Figura 3.10, generada con la distribución  $\mathcal{G}_A^0$ , y a la imagen SAR real que se muestra en la Figura 2.4. Los resultados se muestran en la Figura 6.5 y en la Figura 6.6, respectivamente. Las líneas finas corresponden a las regiones iniciales encontradas automáticamente, las líneas gruesas, corresponden a la curva final obtenida por el método.

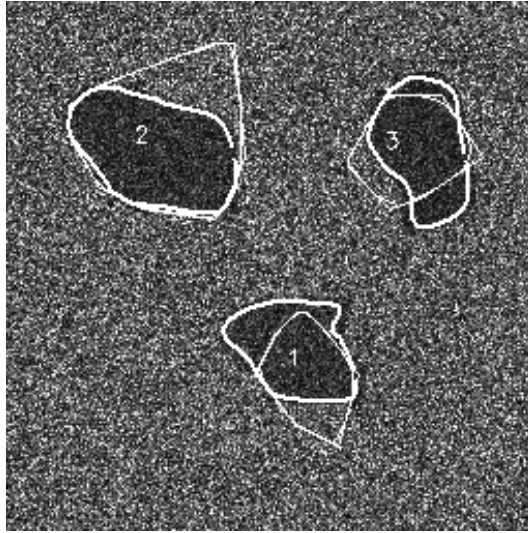


Figura 6.5: Resultado de aplicar el Algoritmo 7 a una imagen SAR sintética. Las líneas finas corresponden a las regiones iniciales y las gruesas corresponden a los contornos encontrados por el método.



---

**Algoritmo 7** Algoritmo de detección de contornos de regiones utilizando difusión anisotrópica.

---

- 1: Determinar automáticamente regiones de interés descritas por medio de una curva B-Spline, usando el Algoritmo 5.
  - 2: Determinar una serie de segmentos radiales sobre la imagen, como muestra la Figura 5.4.
  - 3: **for** cada segmento  $s^{(i)}$  **do**
  - 4:   **for** cada pixel del segmento  $s^{(i)}$  **do**
  - 5:     Estimar el parámetro  $\alpha$  utilizando los pixels sobre una ventana de  $9 \times 9$ .
  - 6:   **end for**
  - 7:   Se genera un arreglo de estimaciones para cada pixel del segmento  $s^{(i)}$ ,  $\hat{\Lambda}^{(i)} = [\hat{\alpha}_1^{(i)}, \dots, \hat{\alpha}_m^{(i)}]$ , donde  $m$  es el tamaño del segmento.
  - 8:   Suavizar el arreglo  $\hat{\Lambda}^{(i)}$  generado en el paso anterior usando el algoritmo de difusión anisotrópica. Se genera un arreglo  $S$ , donde  $S$  es el arreglo de estimadores suavizado.
  - 9:   Detectar del punto de discontinuidad dentro del arreglo  $S$ , convolucionando con un operador de detección de bordes clásico.
  - 10: **end for**
  - 11: Construir la B-Spline que interpola los puntos encontrados.
- 

## 6.5. Conclusiones

Este capítulo presenta un nuevo método de detección de contornos en imágenes SAR usando curvas B-Spline, la distribución estadística  $\mathcal{G}_A^0$  y el método de difusión anisotrópica para eliminación de ruido.

En el primer paso se encuentran automáticamente regiones iniciales correspondientes a áreas con diferentes grados de homogeneidad. Para cada región, se disponen una serie de segmentos sobre la imagen, en un entorno de la curva inicial y se estiman los parámetros estadísticos para cada pixel del segmento, utilizando una ventana deslizante. El objetivo es hallar la posición de máxima discontinuidad en el vector de parámetros estimados sobre el segmento. Sin embargo, las estimaciones poseen errores provenientes de diferentes cálculos y es mejor suavizarlos para obtener una aproximación del punto de borde con mayor precisión. En este capítulo utilizamos el método de difusión anisotrópica con el propósito de suavizar el arreglo de estimaciones. Este método posee una muy fácil implementación, y tiene muy buen comportamiento en eliminación de ruido sin alteraciones de los bordes.

El resultado de aplicar el algoritmo es una curva que ajusta al borde de cada región de la imagen con diferente grado de homogeneidad, determinada por una curva B-Spline. Como los métodos anteriores, trabaja sobre regiones en lugar de hacerlo sobre toda la imagen y obtiene una fórmula matemática que lo describe. Los resultados muestran que en imágenes sintéticas el método es muy bueno, aunque el costo computacional es mayor que en los algoritmos del capítulo 5, como se deduce de los estudios que se presentan en el capítulo 8, donde todos los métodos son comparados entre sí. En imágenes reales los



Figura 6.6: Resultado de aplicar el Algoritmo 7 a una imagen SAR real. Las líneas finas corresponden a las regiones iniciales y las gruesas corresponden a los contornos hallados por el procedimiento.

errores que se cometen al estimar los parámetros estadísticos para cada pixel dan como resultado baja precisión en encontrar los puntos de borde y por esa razón el método es menos eficiente.



## Capítulo 7

# Detección de contornos en imágenes SAR utilizando la Dimensión Fractal

En este capítulo se presenta un algoritmo de segmentación de imágenes SAR, analizando la dimensión fractal. La geometría fractal de Mandelbrot ([98], [76] [75]) provee una descripción matemática de formas complejas que se encuentran en la naturaleza. Numerosos autores han demostrado que la dimensión fractal puede utilizarse como una medida de rugosidad de una zona de la imagen (ver [15]). En este capítulo, proponemos una forma de combinar el análisis de la dimensión fractal con los métodos de segmentación basados en contornos activos que se presentan en el capítulo 5.

La dimensión fractal se ha utilizado como descriptor, fundamentalmente para la segmentación basada en texturas y rugosidad (ver [99], [63], [20], [69]) porque describe características de la estructura contextual de la imagen. Se ha utilizado, además, en el análisis de la superficie del mar ([6], [80]) y también en segmentación de imágenes SAR, combinada con la Transformada Rápida de Fourier([8], [24]).

En esta parte de la tesis, se caracteriza la rugosidad de las diferentes regiones de una imagen SAR con una estimación de la dimensión fractal. El objetivo es establecer comparaciones entre ellas y encontrar puntos de borde entre áreas de distinto grado de homogeneidad. Como ya hemos mencionado, los algoritmos propuestos en esta tesis, trabajan sobre regiones de la imagen específicamente determinadas, en lugar de hacerlo sobre toda la imagen, lo cual representa una ventaja considerable, dada la complejidad de las imágenes SAR y el alto costo computacional del cálculo de la dimensión fractal.

Este capítulo está compuesto de la siguiente manera, en la sección 7.1 se presenta la definición de la dimensión fractal para conjuntos autosimilares, en la sección 7.2 se explican dos métodos distintos para estimar la dimensión fractal, la dimensión *box-counting* y la dimensión *box-counting* diferencial. En la sección 7.3 se introduce el algoritmo desarrollado

para detección de bordes de objetos en una imagen SAR. En la sección 7.4 se muestran los resultados obtenidos y finalmente, en la sección 7.5 se presentan las conclusiones para este capítulo.

## 7.1. Definición de Dimensión Fractal

La Dimensión Fractal ( $DF$ ) de un conjunto acotado en  $\mathbb{R}^n$ , es un número real que caracteriza su complejidad geométrica y puede utilizarse como índice de la irregularidad del conjunto. Su definición está basada en el concepto de autosimilaridad, el cual se refiere a que algunos objetos pueden construirse con una cantidad de copias más pequeñas de sí mismo. El grado de autosimilaridad está determinado por el parámetro  $DF$ . Para más detalles ver [26, 15].

Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto cerrado. Una función  $\phi : D \longrightarrow D$  es una contracción sobre  $D$ , si existe un número  $c \in \mathbb{R}$ ,  $0 < c < 1$  tal que

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq c|x - y|$$

para todo  $x, y \in D$ .

Si se da la igualdad, es decir si

$$|\phi(x) - \phi(y)| = c|x - y|$$

para todo  $x, y \in D$ , entonces  $\phi$  es una función de similaridad.

Sea  $A$  un conjunto acotado,  $A \subset D$ , entonces  $A$  es invariante por transformaciones de contracción si se cumple que

$$A = \bigcup_{i=1}^m \phi_i(A) \quad (7.1)$$

donde  $\{\phi_1, \dots, \phi_m\}$  es un conjunto de contracciones.

Si el conjunto  $A$  es invariante por transformaciones de similaridad, es decir que  $\{\phi_i\}_i$  es una función de similaridad, para todo  $i = 1, \dots, m$ , entonces  $A$  se llama conjunto autosimilar y es la unión de una cantidad de copias más pequeñas de sí mismo, es decir que es la unión de  $N_r = N_r(A)$  copias distintas de sí mismo escaladas por un factor  $r$  (ver [98], [97] y [96]). En este caso, la dimensión fractal  $DF$  de  $A$  está dada por la relación:

$$N_r r^{DF} = 1 \quad (7.2)$$

o lo que es lo mismo

$$DF = \frac{\log N_r}{\log \frac{1}{r}} \quad (7.3)$$

Lamentablemente, esta dimensión sólo está definida para un grupo reducido de conjuntos. En el caso de conjuntos que no son autosimilares, existen otras definiciones de dimensión equivalentes que pueden ser aplicables, como la dimensión de Hausdorff o la dimensión *box-counting* (ver [26]). En la sección 7.2 se presentan la dimensión *box-counting* y la dimensión *box-counting* diferencial.

## 7.2. Estimaciones de la dimensión de una región en una imagen

Existen diversos métodos para calcular estimaciones de la dimensión fractal de una región en una imagen, la mayoría de los cuales se aplican a imágenes que deben ser binarias (sólo dos niveles de gris), ver por ejemplo [69]. En esta sección se presentan dos métodos para estimar la dimensión de una región en una imagen, la dimensión *box-counting* y la dimensión *box-counting* diferencial. Como se describe en la introducción, el propósito de este capítulo es caracterizar la rugosidad de distintas zonas de la imagen utilizando la dimensión como descriptor y establecer comparaciones entre ellas para hallar los bordes dentro de la imagen. En este sentido, ambos métodos exhiben resultados muy satisfactorios.

### 7.2.1. Dimensión *box-counting*

Uno de los métodos propuestos para caracterizar el nivel de rugosidad de una zona de una imagen es la dimensión *box-counting*. Este método es muy utilizado porque exhibe buena relación de compromiso entre el tiempo de cómputo y la exactitud (ver [26]).

Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto no vacío, se define el diámetro de  $U$  como

$$|U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\} \quad (7.4)$$

Sea  $\{U_i\}_{i \in I}$ , una colección finita o numerable de conjuntos de diámetro a lo sumo  $r$ , entonces si se cumple que para un conjunto  $F \subset \mathbb{R}^n$ ,  $F \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ , entonces decimos que  $\{U_i\}_{i \in I}$  es un  $r$ -cubrimiento de  $F$ .

Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  cerrado y sea  $N_r(A)$  la menor cantidad de conjuntos de diámetro a lo sumo  $r$  con los que se puede cubrir el conjunto  $A$ , entonces la dimensión *box-counting* de  $A$  es  $DB$

$$DB = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(N_r(A))}{\log(\frac{1}{r})} \quad (7.5)$$

si el límite existe. Puede demostrarse que en el caso de que  $A$  sea un conjunto planar, esta definición es equivalente a utilizar conjuntos cuadrados de lado  $r$  (celdas) para el cubrimiento. La dimensión *box-counting* de un conjunto planar se basa en contar la cantidad de conjuntos del cubrimiento (celdas) dentro de las cuales el conjunto tenga medida no nula.

Sea  $r$  la longitud de la arista de las celdas utilizadas para cubrir el conjunto, y  $N_r$  la cantidad de celdas en donde el conjunto tiene medida no nula, entonces si el límite existe, la dimensión *box-counting*  $DB$  es

$$DB = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(N_r)}{\log(\frac{1}{r})}. \quad (7.6)$$

Esta versión de la dimensión de un conjunto es muy utilizada porque resulta muy fácil de calcular empíricamente. La diferencia con la ecuación 7.5 es que esta versión se

refiere a un cubrimiento cuyos conjuntos son cuadrados, en lugar de considerar conjuntos de cualquier forma. Dada una imagen binaria (compuesta sólo por dos niveles de gris), se realiza una partición de la imagen en celdas de tamaño  $r$ , como muestra la Figura 7.1, para varios valores de  $r$  y para cada  $r$ , se cuentan la cantidad de celdas que cubren el objeto, llamada  $N_r$ . Luego se estima la dimensión *box-counting* como la pendiente de la recta de cuadrados mínimos que ajusta al gráfico de

$$\log(N_r) \text{ vs. } \log\left(\frac{1}{r}\right) \quad (7.7)$$

como se muestra en la Figura 7.2.

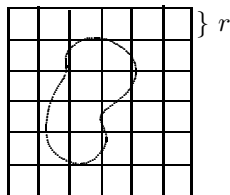


Figura 7.1: Partición de la imagen en una grilla con celdas de lado  $r$ .

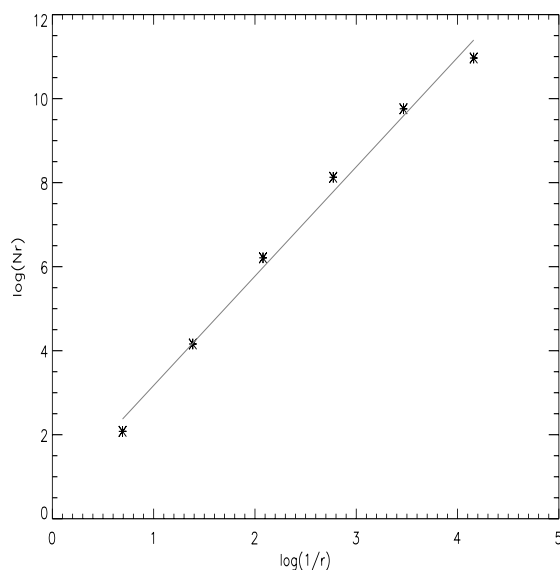


Figura 7.2: Recta de cuadrados mínimos que ajusta los datos de  $\log(N_r)$  vs.  $\log(\frac{1}{r})$

Las imágenes SAR no son binarias y por lo tanto la dimensión *box-counting*  $DB$  se calcula de acuerdo a un umbral  $U$  determinado por el histograma de la imagen. Para poder calcular  $DB$  se realiza previamente una umbralización de la imagen, de manera de obtener una imagen binaria. La elección de este umbral  $U$  es determinante en la precisión de la estimación de la dimensión *box-counting*, por ejemplo un umbral demasiado alto da

como resultado una imagen con muchos pixeles negros, y por lo tanto no es una buena representación binaria de la imagen original. En las imágenes sintéticas generadas con la función de distribución  $\mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, n)$ , el umbral  $U$  es directamente proporcional al parámetro  $\gamma$ , debido a que éste es un parámetro de escala. En las imágenes que se muestran en la Figura 3.12, en el capítulo 3, sección 3.4, puede verse como aumenta el brillo de la imagen a medida que el parámetro  $\gamma$  se incrementa. Por lo tanto, a medida que  $\gamma$  aumenta, el valor de  $U$  es mayor.

En este capítulo combinamos el análisis de la dimensión fractal con los métodos de detección de bordes en imágenes SAR desarrollados en el capítulo 5, para eso calculamos la dimensión *box-counting* para cada pixel, utilizando una ventana deslizante centrada en el pixel correspondiente y tomando la subimagen determinada por la ventana. El proceso para hallar la dimensión *box-counting* pixel por pixel se resume en el Algoritmo 8.

---

**Algoritmo 8** Algoritmo para calcular la dimensión *box-counting* pixel por pixel.

---

```

1: for cada pixel de la imagen do
2:   Considerar una ventana  $W$  de tamaño  $m \times m$ , centrada en el pixel.
3:   Calcular la dimensión box-counting utilizando la subimagen determinada por  $W$ :
4:   for cada  $r$  do
5:     Particionar la imagen  $W$  en una grilla de celdas de tamaño  $r$ , como muestra la
       Figura 7.1.
6:     Calcular  $N_r$ .
7:   end for
8:   Estimar la dimensión box-counting como la pendiente de la recta de mínimos cuadra-
       dos que ajusta los datos  $(\log(\frac{1}{r}), \log(N_r))$ .
9: end for

```

---

La Figura 7.3(a) muestra una imagen sintética compuesta por cuatro regiones diferenciadas, el fondo y tres objetos. El fondo fue generado con la distribución  $\mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, 1)$ , con parámetros  $\alpha = -10$ ,  $\gamma = 0,26$  y los objetos con  $\alpha = -5$ ,  $\gamma = 0,53$ . La Figura 7.3(b) muestra los histogramas correspondientes a ambas clases y puede verse que el área de intersección debajo de las curvas es muy grande. Esto implica que si se realiza una clasificación utilizando un método de clasificación tradicional como el clasificador de Bayes (ver [46]), resulta una segmentación con alta tasa de error, como se ve en la Figura 7.3(c). Sin embargo, el mapa de la dimensión fractal de la imagen original, muestra que el resultado es notablemente bueno para la extracción de contornos y bordes, como muestra la Figura 7.3(d).

El problema que presenta este método es el cálculo del umbral para cada imagen. En la siguiente sección se presenta un método para estimar la dimensión fractal en imágenes que no sean binarias, sin tener que estimar un umbral de binarización.



### 7.2.2. Dimensión *Box-Counting* Diferencial

El método para calcular la dimensión *box-counting* diferencial fue propuesto por Sakar *et al.* ([110]) y utilizado posteriormente por Chaudhuri *et al.* en clasificación de texturas (ver [5]). En este trabajo los autores describen un método que tiene la ventaja de que puede aplicarse a imágenes que posean 256 niveles de gris.

La ecuación 7.3, es la base para calcular la dimensión *box-counting* diferencial. En este caso  $N_r$  se determina como se explica a continuación.

Dada una imagen

$$I : D \longrightarrow V$$

$D \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ,  $V \subset \mathbb{R}$ , de  $M \times M$  pixels, se realiza una partición de la misma en celdas  $C_{(i,j)}^s$ ,  $(i,j) \in D$ , que son cuadradas de lado  $s$ , donde  $1 < s \leq M/2$  y  $s \in \mathbb{N}$ . Luego el factor de escala correspondiente, definido en la sección 7.1, es  $r = s/M$ .

Sobre cada una de las celdas se considera una columna de cajas (cubos) de tamaño  $s \times s \times s$ , es decir, se hace una partición de los niveles de gris sobre cada celda, como muestran las Figuras 7.4 y 7.5.

Se consideran en  $\mathbb{R}^3$ , los cubos  $C_{\vec{V}}$ , centrados en  $\vec{V} = (v_1, v_2, v_3)^t \in \mathbb{R}^3$ , que están dados por:

$$C_{\vec{V}} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x - v_1| \leq s, |y - v_2| \leq s, |z - v_3| \leq s, s \in \mathbb{N}\} \quad (7.8)$$

Sea  $\vec{w}_{(i,j)} = (n_1, n_2, 0)$  el centro de la celda  $C_{(i,j)}^s$  en el dominio de la imagen. Entonces, consideramos los cubos  $C_{\vec{V}}$ , sobre  $C_{(i,j)}^s$ , con  $\vec{V} = (n_1, n_2, n_3)$  donde  $n_3$  toma los valores  $n_3 = \frac{s}{2} + ns, n \in \mathbb{N}$

Sean

$$M_I = \max_{(x,y) \in C_{(i,j)}^s} I(x, y) \quad (7.9)$$

y

$$m_I = \min_{(x,y) \in C_{(i,j)}^s} I(x, y) \quad (7.10)$$

el máximo y mínimo nivel de gris sobre la celda  $C_{(i,j)}^s$ , respectivamente, entonces si el valor  $M_I$  pertenece al  $k$ -ésimo cubo y el valor de  $m_I$  pertenece  $l$ -ésimo cubo de la columna que se levanta sobre la celda  $C_{(i,j)}^s$ , entonces

$$n_r(i, j) = l - k + 1$$

es la contribución en la  $(i, j)$ -ésima celda. Tomando todas las contribuciones sobre toda la grilla se obtiene:

$$N_r = \sum_{i,j} n_r(i, j) \quad (7.11)$$

$N_r$  se calcula para diferentes valores de  $r$ . Luego, la dimensión *box-counting* diferencial *DBD* se estima como la pendiente de la recta de mínimos cuadrados que ajusta  $\log(N_r)$  vs.  $\log(\frac{1}{r})$ .

### 7.3. Detección de bordes de objetos en una escena

Para encontrar los puntos del borde de los objetos en una escena, se determinan regiones de interés como se explica en la sección 5.1 y se trazan segmentos radiales a partir del centroide de estas regiones, como se explica en la sección 5.2. Luego, se consideran los pixels dentro de un área rectangular de manera que la dirección de su eje mayor coincida con la del segmento que se está procesando y tal que incluya una muestra de la región y otra del fondo. Entonces, para cada pixel del segmento, se calcula la dimensión *box-counting* o *box-counting* diferencial puntualmente, utilizando una ventana deslizante centrada en cada pixel del segmento. Cada ventana se considera una subimagen para la cual se calcula la dimensión, como muestra el Algoritmo 8.

Si un punto pertenece al borde del objeto entonces una muestra tomada en una vecindad de ese punto exhibe una discontinuidad en el valor de la dimensión calculada y por lo tanto, es un punto de transición. Luego, se encuentra el punto de borde sobre la recta convolucionando con el operador  $[-2, -1, 0, 1, 2]$ . El esquema del procedimiento se muestra en el Algoritmo 9.

---

**Algoritmo 9** Algoritmo de detección de bordes basado en el cálculo de la Dimensión Fractal.

---

- 1: Determinar regiones de interés por medio de una curva B-Spline usando el Algoritmo 2.
  - 2: Determinar una serie de segmentos radiales sobre la imagen como muestra la Figura 5.4.
  - 3: **for** cada segmento **do**
  - 4:   **for** cada pixel sobre el segmento **do**
  - 5:     Calcular la dimensión *box-counting* o *box-counting* Diferencial utilizando una ventana deslizante.
  - 6:   **end for**
  - 7:   Detectar el punto de borde convolucionando con el operador  $[-2, -1, 0, 1, 2]$ .
  - 8: **end for**
  - 9: Construir la B-Spline que interpola los puntos encontrados.
-

## 7.4. Resultados

En la Figura 7.6, se muestra el resultado de aplicar el Algoritmo 9 a la imagen sintética mostrada en la Figura 7.3(a). Puede observarse que las curvas encontradas ajustan muy bien al borde de las tres regiones que aparecen en la imagen.

La Figura 7.7 muestra una imagen sintética generada con la distribución  $\mathcal{G}^H(\omega, 1)$  (esta distribución se describe en el capítulo 3, sección 3.5), con parámetros  $\omega = 1$  para el objeto y  $\omega = 10$  para el fondo. La Figura 7.8(a) muestra el mapa de la dimensión *box-counting* para cada pixel de la imagen de la Figura 7.7. La Figura 7.8(b) muestra el resultado de aplicar el Algoritmo 9 a la misma imagen utilizando la dimensión *box-counting* como descriptor de rugosidad. Se observa que la curva encontrada por el método ajusta muy bien al borde del objeto.

La Figura 7.9(a) muestra el mapa de la dimensión *box-counting* diferencial para la imagen de la Figura 7.7. La Figura 7.9(b) muestra el resultado de aplicar el Algoritmo 9 a la misma imagen, utilizando la dimensión *box-counting* Diferencial como descriptor de rugosidad.

Vemos que en ambos casos, el contorno resultante ajusta bien al borde del objeto.

La Figura 7.10 muestra el resultado de aplicar el algoritmo a la imagen E-SAR real de la Figura 5.17(a). En este caso se ha usado la dimensión *box-counting* diferencial como descriptor.

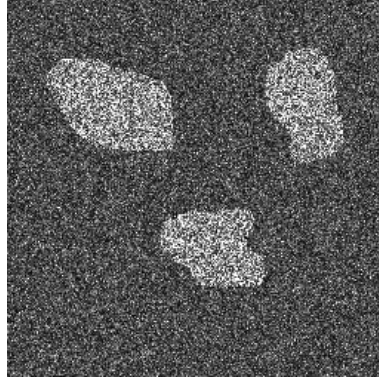
En el capítulo 8 se evalúa el algoritmo descrito en este capítulo haciendo una estimación de los errores que comete. También se compara con los algoritmos descritos en los capítulos 5 y 6 y se extraen conclusiones.

## 7.5. Conclusiones

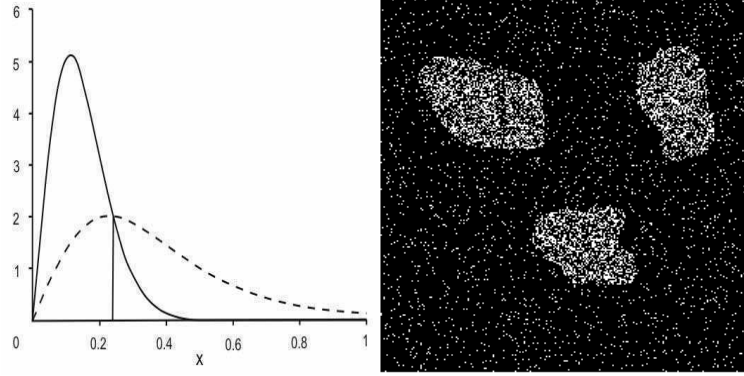
En este capítulo se describe un nuevo método de segmentación de imágenes SAR usando una técnica basada en la estimación de la dimensión fractal y contornos deformables. La propuesta de este capítulo es utilizar la dimensión fractal como descriptor de la rugosidad de una zona de la imagen para encontrar puntos de borde entre regiones con diferentes grados de homogeneidad.

En el primer paso se especifican regiones iniciales, por medio de puntos de control, los cuales determinan una curva B-Spline. Luego se aplica un proceso de detección de puntos de borde sobre una serie de segmentos, utilizando la dimensión *box-counting* y la dimensión *box-counting* diferencial.

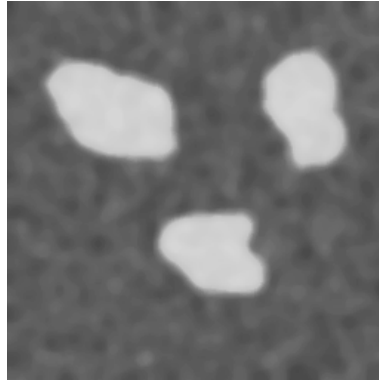
El método propuesto analiza la imagen en un entorno de la región inicial, lo cual disminuye el costo computacional. Se obtiene también una fórmula matemática para el borde del objeto buscado. Los resultados son muy buenos, tanto en imágenes sintéticas como reales.



(a) Imagen sintética generada con el modelo estadístico  $\mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, 1)$  con parámetros  $\alpha = -10$  y  $\gamma = 0,26$  para el fondo y  $\alpha = -5$ ,  $\gamma = 0,53$  para los objetos.



(b) Histogramas correspondientes a(c) Resultado de la clasificación utilizando el clasificador de Bayes.



(d) Mapa de la dimensión *box-counting*, para cada pixel de la imagen de la Figura 7.3(a).

Figura 7.3: Imagen SAR sintética con dos tipos de regiones diferentes, generada con la distribución  $\mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, n)$  a la cual se le aplica una clasificación con el clasificador de Bayes y la dimensión *box-counting*.

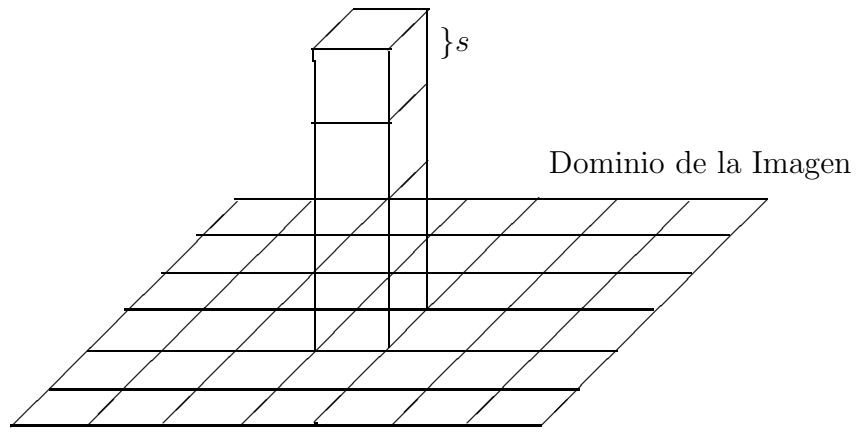


Figura 7.4: Partición de la imagen en celdas de lado  $s$  y de los niveles de gris en cubos de lado  $s$ .

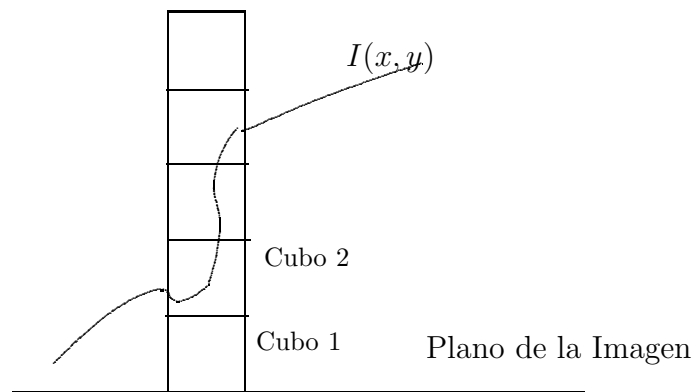


Figura 7.5: Vista de frente de la partición de los niveles de gris en cubos de lado  $s$ .

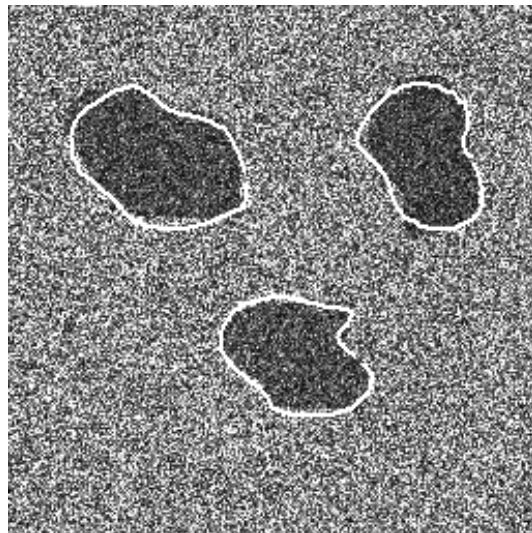


Figura 7.6: Resultado de aplicar el Algoritmo 9 a la imagen sintética de la Figura 7.3(a), utilizando la dimensión *box-counting*.

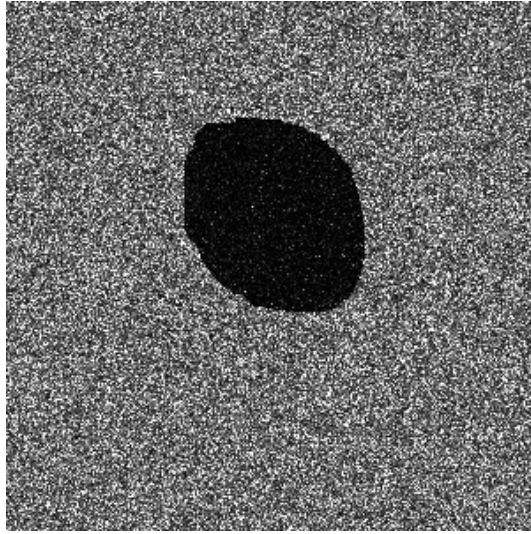
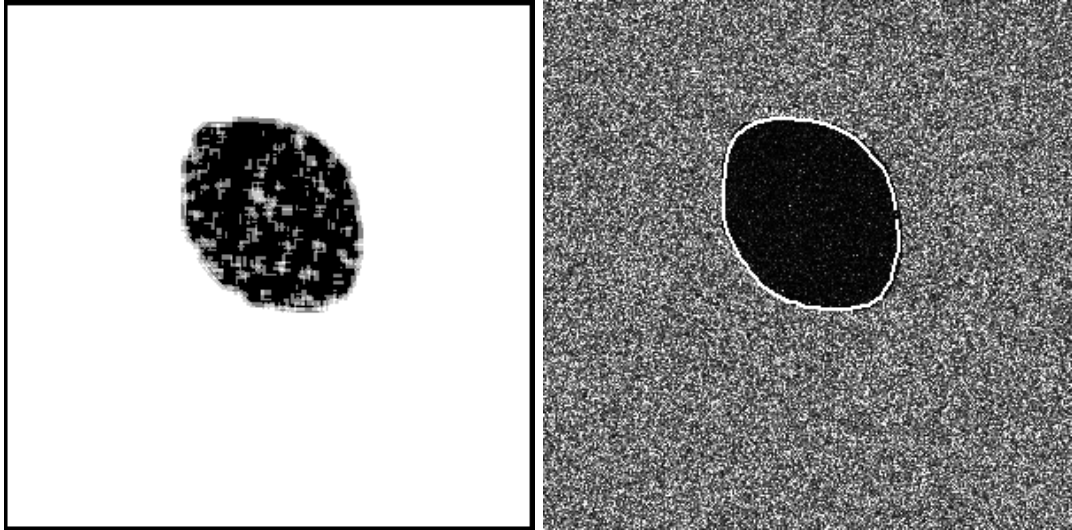


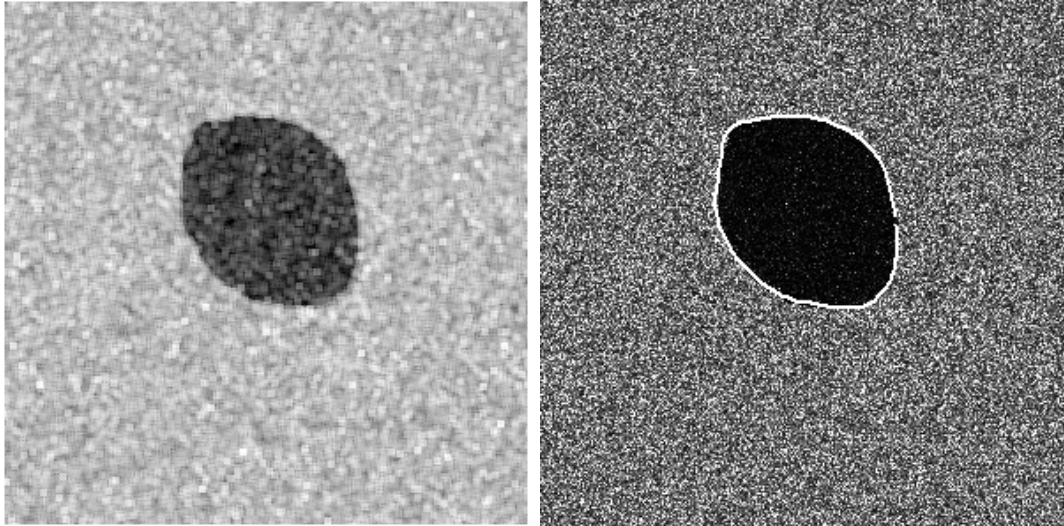
Figura 7.7: Imagen sintética generada con la distribución  $\mathcal{G}_I^H(\omega, \eta)$ , con parámetros  $\omega = 1$ ,  $\eta = 1$  para el objeto y  $\omega = 10$ ,  $\eta = 1$  para el fondo.



(a) Mapa de la dimensión *box-counting* de la imagen de la Figura 7.7.

(b) Contorno del objeto utilizando la dimensión *box-counting* como descriptor de rugosidad.

Figura 7.8: Resultado de aplicar el algoritmo de detección de bordes utilizando la dimensión *box-counting* como descriptor de rugosidad, en la imagen SAR sintética de la Figura 7.7.



(a) Mapa de la dimensión *box-counting* diferencial de la imagen de la Figura 7.7. (b) Contorno del objeto utilizando la dimensión *box-counting* diferencial como descriptor de rugosidad.

Figura 7.9: Resultado de aplicar el algoritmo de detección de bordes utilizando la dimensión *box-counting* diferencial como descriptor de rugosidad, en la imagen SAR sintética de la Figura 7.7.



Figura 7.10: Resultado de aplicar el algoritmo de detección de bordes utilizando la dimensión *box-counting* diferencial a la imagen E-SAR real de la Figura 5.17(a).

## Capítulo 8

# Evaluación y Comparación de los Métodos Propuestos

Un aspecto importante para evaluar un método de segmentación, es estimar el error en que se incurre al ajustar una curva al borde de un objeto. Obtener estimaciones de error permite hacer comparaciones entre distintos métodos y decidir cuándo es conveniente usarlos. Este capítulo está dedicado a calcular el error que se comete al aplicar los métodos de maximizar la función de verosimilitud, descrito en el capítulo 5, hallar la máxima discontinuidad del parámetro  $\alpha$  sobre un segmento de recta, el de suavizar con difusión anisotrópica, presentados en el capítulo 6 y el de la estimación de la dimensión fractal, desarrollado en el capítulo 7.

Los métodos propuestos en esta tesis tienen dos instancias fundamentales en el ajuste del contorno de un objeto; la primera es encontrar el punto de borde sobre un segmento de recta y la segunda es hallar la curva B-Spline que ajusta al borde del objeto. En este capítulo consideramos el error que se comete al estimar el punto de borde (error local) y el error que se comete al ajustar el borde de un objeto por una curva (error global), con cada uno de los métodos antes mencionados. Sin embargo, esto no es posible hacerlo en imágenes reales porque no se tiene información sobre la posición óptima de la curva sobre la imagen.

Una herramienta muy utilizada en estadística es la experiencia de Monte Carlo. Las técnicas de Monte Carlo proponen generar una gran cantidad de muestras de variables aleatorias con distribuciones específicas de interés y luego utilizarlas para hacer inferencias y sacar conclusiones sobre los métodos, evaluando el comportamiento de los mismos sobre las muestras.

En este capítulo se utilizan las técnicas de Monte Carlo sobre un conjunto de imágenes sintéticas, generadas con la distribución  $\mathcal{G}_A^0$ , con el algoritmo descrito en la sección 3.4.3, capítulo 3. Los métodos propuestos se prueban sobre este conjunto de imágenes, diseñadas especialmente para estimar errores.



Este capítulo está compuesto de la siguiente manera, en la sección 8.1 se presenta una manera de evaluar el error local en la determinación del punto de borde sobre un segmento de recta. Luego, en la sección 8.2 se introduce una forma de medir el error que se comete al aproximar el contorno de un objeto por una curva, esto es el error global. En la sección 8.3 se presentan las comparaciones entre los métodos propuestos en esta tesis. Comparamos el algoritmo para maximizar la función de verosimilitud (MMV), descrito en el capítulo 5, con los métodos de máxima discontinuidad del parámetro  $\alpha$  (MMD), de difusión anisotrópica (MDA), ambos descritos en el capítulo 6 y de estimación de la dimensión fractal (MDF), capítulo 7. En la sección 8.4 se muestra una manera de medir la dificultad que existe para encontrar bordes, dependiendo de los datos de la imagen, tanto para imágenes sintéticas como reales. Finalmente en la sección 8.5 se extraen conclusiones sobre la capacidad y eficiencia de los métodos.

## 8.1. Error en la Estimación del Punto de Borde (Error Local)

Estimamos el error que se comete al encontrar el punto de transición sobre un segmento de recta, con cada uno de los métodos propuestos, siguiendo el proceso que se describe a continuación. Se toman 200 muestras rectangulares de  $20 \times 100$  pixels (20 filas, 100 columnas), generadas con la distribución  $\mathcal{G}_A^0(\alpha, 1, 1)$ . Cada una de las muestras se genera con el parámetro  $\alpha_1 = -3$ , en una mitad y con el parámetro  $\alpha_2 = -10$ , en la otra mitad. La Figura 8.1 muestra un esquema de la forma que tienen cada una de las muestras rectangulares.

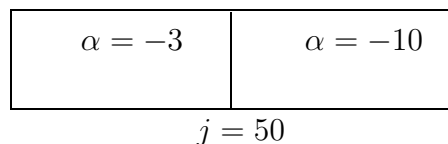


Figura 8.1: Esquema de una muestra rectangular generada con distribución  $\mathcal{G}_A^0(-3, 1, 1)$  a la izquierda y  $\mathcal{G}_A^0(-10, 1, 1)$  a la derecha.

Para cada una de las muestras se calcula la posición del punto de transición sobre el eje mayor y la distancia euclídea (medida en pixels) del punto encontrado al punto verdadero, cuya posición es 50. Se genera, entonces un arreglo  $N$ -dimensional  $A$ , con  $N = 200$ , definido de la siguiente manera:

$$A(i) = |P_V - P_T(i)|, \quad i = 0, \dots, 199 \quad (8.1)$$

donde  $P_V = 50$  es el punto de transición verdadero y  $P_T(i)$ ,  $i = 0, \dots, 199$  es el punto de transición encontrado por el método en evaluación, correspondiente a la  $i$ -ésima muestra.

Consideramos las frecuencias relativas de que el punto encontrado tenga error menor que  $k$  pixels,  $k \in \mathbf{N}$ ,  $k \geq 0$ , de la siguiente manera:

$$f_r(k) = \frac{H(k)}{200} \quad (8.2)$$

donde  $H(k)$  está dado por

$$H(k) = \#\{j \in \{0, \dots, 199\} \text{ tal que } A(j) \leq k\} \quad (8.3)$$

con  $\#\{\cdot\}$  el cardinal de un conjunto.  $H(k)$  corresponde a la frecuencia de que los puntos  $P_T(i)$ ,  $i = 0, \dots, 199$  hayan sido calculados con error menor que  $k$  pixels. Notar que los valores de  $k$  más cercanos a cero son los que se deben tener en cuenta para evaluar el método que se está considerando.

El Algoritmo 10 ilustra este proceso.

---

**Algoritmo 10** Estimación del error del punto de borde

---

- 1: Simular 200 muestras de datos SAR, de  $20 \times 100$  pixels, generadas en mitades con distribución  $\mathcal{G}_A^0(\alpha, 1, 1)$ , con  $\alpha_1 = -3$  y  $\alpha_2 = -10$ , respectivamente.
  - 2: **for** cada método en evaluación **do**
  - 3:   **for** cada muestra  $i = 0, \dots, 199$  **do**
  - 4:     Hallar el punto de transición sobre el eje mayor de la muestra,  $P_T(i)$   $i = 0, \dots, 199$ .
  - 5:     Hallar las distancias (en pixels) desde el punto verdadero hasta el punto encontrado.
  - 6:     Construir el arreglo  $A$ , como en la ecuación 8.1.
  - 7:     Calcular el arreglo  $H$  como en la ecuación 8.3.
  - 8:     Calcular el arreglo  $f_r$  como en la ecuación 8.2.
  - 9:   **end for**
  - 10:   Retornar el arreglo de frecuencias relativas  $f_r^M$  correspondientes al método  $M$ , para cada método.
  - 11: **end for**
- 

Llamamos  $f_r^M$  al arreglo de frecuencias relativas de la fórmula 8.2, calculadas luego de aplicar el método  $M$ . Si para algún método  $M$  se cumple que  $f_r^M(2) < 0,5$ , entonces el método debe descartarse, porque significa que menos de la mitad de los puntos de transición fueron encontrados con 2 pixels de precisión.

Un método  $M$  es más eficiente que otro método  $K$  si  $f_r^M(k) > f_r^K(k)$ , para valores de  $k$  cercanos a cero.

## 8.2. Error en el Ajuste del Contorno por una Curva (Error Global)

En esta sección se presenta una manera de estimar el error global que se comete al ajustar el borde de un objeto en una escena, por una curva encontrada utilizando un algoritmo de ajuste. El objetivo es realizar una comparación empírica entre distintos métodos.

Se genera una familia de imágenes de prueba, variando las siguientes características:

- Tamaño
- Oscilación del contorno
- Intensidad de la curvatura

Esta familia de imágenes está compuesta por un objeto y un fondo, donde el objeto del cual se desea encontrar el borde tiene forma de flor. El contorno de las flores se genera aleatoriamente por medio de la siguiente curva paramétrica en coordenadas polares:

$$\begin{aligned} f(s; \delta, \beta, \eta) &= (\theta(s), \rho(s; \delta, \beta, \eta)), \quad s \in [0, S] \\ \theta(s) &= s \frac{2\pi}{S} \\ \rho(s; \delta, \beta, \eta) &= \delta - \eta \cos(\theta(s)\beta) \end{aligned} \tag{8.4}$$

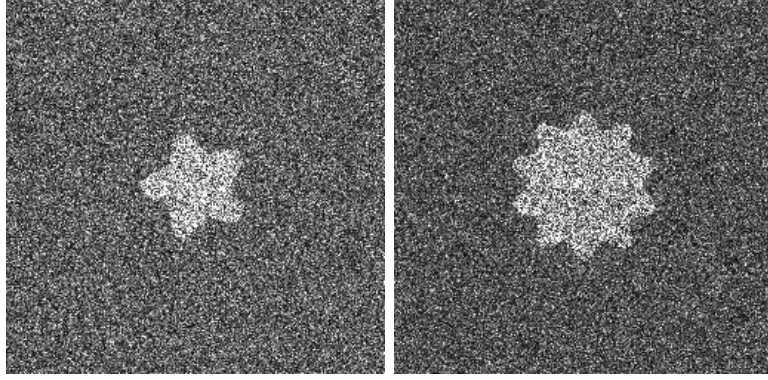
donde  $\beta$  es el radio de la flor,  $\delta$  es la cantidad de pétalos y  $2\eta$  es la profundidad de los pétalos. Los parámetros  $\delta$ ,  $\beta$  y  $\eta$  se consideran variables aleatorias independientes con distribución uniforme, donde los intervalos de variación tomados para cada variable son:  $\delta \in [5, 20]$ ,  $\beta \in [15, 50]$ ,  $\eta \in [2, 10]$  (ver [124]). Modificando los parámetros  $\delta$ ,  $\beta$  y  $\eta$ , se obtienen variaciones en el tamaño de la flor, cantidad y profundidad de pétalos. Luego, la imagen SAR sintética se genera con datos que están distribuidos con distribución  $\mathcal{G}_A^0(-3, 1, 1)$  en el área interior al contorno y distribuidos con distribución  $\mathcal{G}_A^0(-10, 1, 1)$  para los datos correspondientes al fondo. En la Figura 8.2 se muestran algunas de estas imágenes de prueba.

Para calcular el error de aproximación consideramos  $\partial R$  el borde de la región que se desea segmentar y  $\mathcal{C}$  la curva resultante de aplicar el método. Sea  $s^{(j)}$  la  $j$ -ésima recta radial como muestra la Figura 5.4 de la sección 5.2, capítulo 5 cuya ecuación viene dada por:

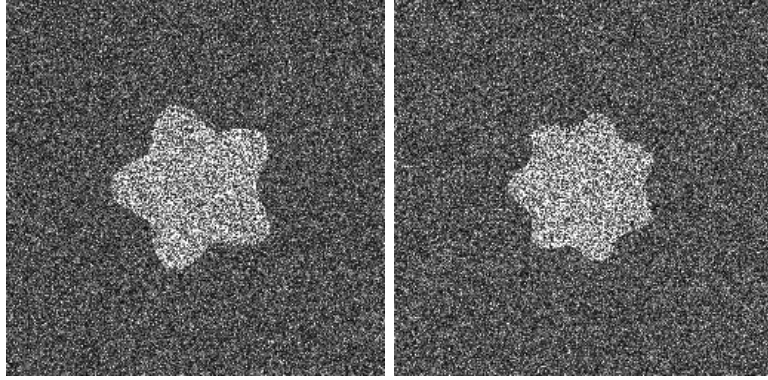
$$s^{(j)} : \lambda \vec{u}^{(j)} + c, \quad \lambda \in \mathbf{R} \tag{8.5}$$

donde  $\vec{u}^{(j)}$  es la dirección unitaria de la recta y  $c$  es el centroide de la región  $R$ . Sean  $\vec{V}_j$  el punto de intersección entre la curva  $\mathcal{C}$  y la recta  $s^{(j)}$ , y  $\vec{W}_j$  el punto de intersección entre la curva  $\partial R$  y la recta  $s^{(j)}$ , o sea

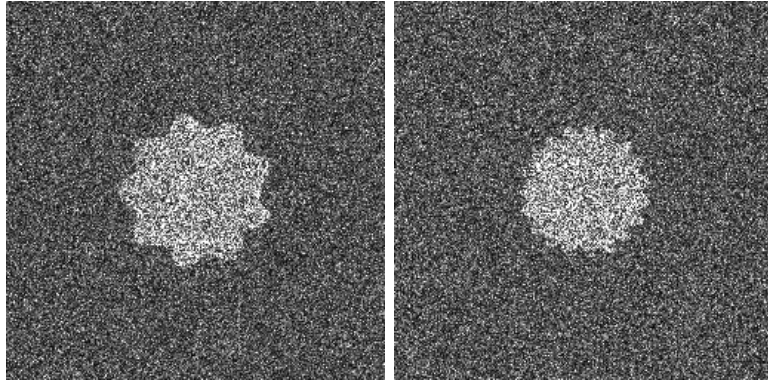
$$\begin{aligned} s^{(j)} \cap \mathcal{C} &= \vec{V}_j \\ s^{(j)} \cap \partial R &= \vec{W}_j \end{aligned} \tag{8.6}$$



(a) Imagen SAR sintética,  $\delta = 5$ ,  $\beta = 30$ ,  $\eta = 7$ . (b) Imagen SAR sintética,  $\delta = 10$ ,  $\beta = 45$ ,  $\eta = 6$ .



(c) Imagen SAR sintética,  $\delta = 5$ ,  $\beta = 49$ ,  $\eta = 9$ . (d) Imagen SAR sintética,  $\delta = 7$ ,  $\beta = 46$ ,  $\eta = 5$ .



(e) Imagen SAR sintética,  $\delta = 9$ ,  $\beta = 48$ ,  $\eta = 5$ . (f) Imagen SAR sintética,  $\delta = 19$ ,  $\beta = 42$ ,  $\eta = 3$ .

Figura 8.2: Conjunto de imágenes sintéticas de prueba, generadas para medir el error que se comete al aplicar los métodos propuestos. Están generadas con distribución  $\mathcal{G}_A^0(-3, 1, 1)$  y con distribución  $\mathcal{G}_A^0(-10, 1, 1)$  en el interior de la flor y el fondo, respectivamente.

Luego, tomamos la distancia entre  $\mathcal{C}$  y  $\partial R$  como

$$d(\partial R, \mathcal{C}) = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{j=1}^N \|\vec{V}_j - \vec{W}_j\|^2} \quad (8.7)$$

Donde  $N$  es la cantidad de segmentos considerados. Utilizamos el valor de  $d(\partial R, \mathcal{C})$  como una medida del error global que se comete al realizar el ajuste.

En el Algoritmo 11 se muestra el resumen del procedimiento para calcular el error global.

---

**Algoritmo 11** Estimación del error de aproximación del contorno (Error Global)

---

```

1: Generar un conjunto de imágenes de prueba utilizando la ecuación 8.4 y el Algoritmo 1
   de simulación de imágenes SAR.
2: for cada método en evaluación do
3:   for cada imagen do
4:     Hallar la curva que ajusta al borde de la flor por medio del método que se está eva-
       luando.
5:     for  $j = 0, \dots, N$  do
6:       Hallar los puntos  $\vec{V}_j$  y  $\vec{W}_j$ , según la ecuación 8.6.
7:       Hallar  $d(\partial R, \mathcal{C})$ , la distancia global como en la en la ecuación 8.7.
8:     end for
9:     Retornar el valor de  $d(\partial R, \mathcal{C})$ .
10:  end for
11: end for

```

---

Con los valores de los errores calculados en el Algoritmo 11 para cada una de las imágenes de prueba, se realiza un gráfico que permite entender el comportamiento de cada método y realizar comparaciones entre los distintos procedimientos.

Sea  $e_{max}$  el máximo error global que se comete al aplicar un método. Consideramos el intervalo de error  $[0, e_{max}]$  y realizamos una partición del mismo  $\{e_0, \dots, e_m\}$  tal que

$$e_i = e_0 + \Delta * i, \quad i = 0, \dots, m \quad (8.8)$$

donde  $m$  es tal que  $e_{max} = e_0 + \Delta * m$  y  $\Delta$  es la longitud de la partición.

Definimos la función  $h : [0, e_{max}] \rightarrow \mathbf{N}$  tal que

$$h(e_i) = \#\{\text{Imágenes de Prueba tal que } e_i \leq d(\partial R, \mathcal{C}) < e_{i+1}\}, \quad i = 0, \dots, m-1 \quad (8.9)$$

Llamamos  $h^M$  a la función  $h$  calculada luego de aplicar el método  $M$ . Decimos que un método es eficiente si los valores de  $h$  son altos para valores de error cercanos a cero.

Definimos la función  $h_A : [0, e_{max}] \rightarrow \mathbf{N}$ , tal que

$$h_A^M(e_i) = \#\{\text{Imágenes de Prueba tal que } d(\partial R, \mathcal{C}) \leq e_i\}, \quad i = 0, \dots, m \quad (8.10)$$

Llamamos  $h_A^M$  a la función  $h_A$  calculada para el método  $M$ . Un método  $M$  es más eficiente que otro método  $K$  si, para un valor de error dado  $e_i$ , se cumple que

$$h_A(e_i) > h_A^K(e_i)$$

En la sección 8.3.2 se muestran los gráficos de los histogramas calculados con las funciones  $h$  y  $h_A$ , correspondientes a los métodos propuestos en esta tesis.

### 8.3. Comparación entre los métodos propuestos

En la sección 5.2 del capítulo 5 se maximiza una función de verosimilitud (MMV) para encontrar cada punto de borde sobre un segmento de recta. Este método fue utilizado en muchas aplicaciones en el contexto de procesamiento de imágenes (ver, por ejemplo [60], [68], [103]); en esta sección se compara este método con los métodos de difusión anisotrópica y estimación de la dimensión fractal que se presentan en los capítulos 6 y 7 y se muestra que es la mejor elección para la situación que nos ocupa. Recordamos que en el capítulo 6 se presenta un método para encontrar el punto de borde sobre cada segmento de recta buscando la máxima discontinuidad en la estimación del parámetro  $\alpha$  (MMD), y el mismo método suavizando el arreglo de los  $\alpha$  estimados con difusión anisotrópica (MDA). En el capítulo 7 se calculan los puntos de borde utilizando la estimación de la dimensión fractal como una medida de rugosidad (MDF).

#### 8.3.1. Error Local

En esta sección se evalúa el error local en la determinación del punto de borde sobre un segmento de recta para cada método propuesto, utilizando el Algoritmo 10, de la sección 8.1. El resultado de aplicar este procedimiento es un arreglo de valores correspondientes a las frecuencias relativas de que el punto de borde se encuentre a una distancia menor que  $k$  pixels, con  $k \in \mathbf{N}$ ,  $k \geq 0$ . Los valores de  $k$  cercanos a cero son los que deben tomarse en cuenta para evaluar los métodos. En este caso hemos considerado  $k \leq 7$ . Para poder visualizar esta información y realizar comparaciones entre los métodos, graficamos el arreglo de frecuencias relativas de cada método  $f_r^M(k)$ . Como ya hemos mencionado, un método  $M$  es más eficiente que otro método  $K$  si  $f_r^M(k) > f_r^K(k)$ , para valores de  $k$  cercanos a cero. Esto implica que en el gráfico la curva correspondiente al método  $M$  está por encima de la curva correspondiente al método  $K$ .

El gráfico de la Figura 8.3 muestra las curvas correspondientes a los métodos MMV, MMD y MDA. El valor en el eje vertical es la frecuencia relativa de encontrar el punto de transición con error menor que el número indicado en el eje horizontal. Por ejemplo

la frecuencia relativa de encontrar el punto de transición con exactitud (error 0 pixel) es 0,99 para el método MMV, 0,16 para el método MMD y 0,48 para el método MDA. La frecuencia relativa de encontrar el punto de transición con error menor o igual que 1 pixel, es 1 para el método MMV, 0,46 para el MMD y 0,85 para el método MDA. Se observa que con el método de difusión anisotrópica se obtienen muy buenos resultados, aunque el de máxima verosimilitud es mejor.

Este gráfico permite también establecer comparaciones entre los métodos. Recordando la fórmula 8.2, se ve que para todo valor de  $k$  pixels, resulta

$$f_r^{MMV}(k) > f_r^{MDA}(k) > f_r^{MMD}(k)$$

y por lo tanto el método MMV posee un comportamiento más eficiente que el método MDA, que a su vez se comporta mejor que el método MMD.

Los parámetros utilizados en la aplicación de difusión anisotrópica fueron  $\sigma = 100$ ,  $\lambda = 0,25$ ,  $t = 10$ , esto implica un alto costo computacional, como se explica en el capítulo 6.

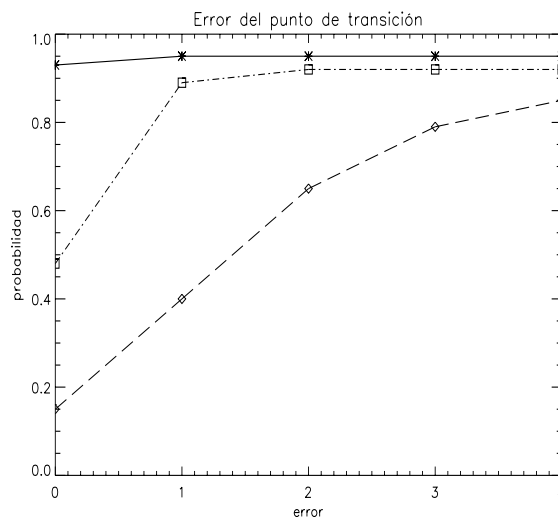


Figura 8.3: Curvas de frecuencias relativas  $f_r(k)$ , de que el error sea menor que  $k$  pixels, para los métodos MMV (línea llena), MMD (línea punteada) y MDA (línea raya-punto).

El mismo experimento se realiza para evaluar y comparar los métodos de maximizar la verosimilitud y el de estimar la dimensión fractal. En la Figura 8.4 se muestran las curvas correspondientes a las frecuencias relativas de error, para ambos métodos. Por ejemplo, la frecuencia relativa de encontrar el punto de transición con error menor que 1 pixel es 0,65, para el método MDF y 0,99 para el método MMV. Comparando las gráficas de las curvas, se observa que para todo valor de  $k$  pixels resulta

$$f_r^{MMV}(k) > f_r^{MDF}(k)$$

En la sección 8.5 se extraen conclusiones a partir de los gráficos expuestos en esta sección.

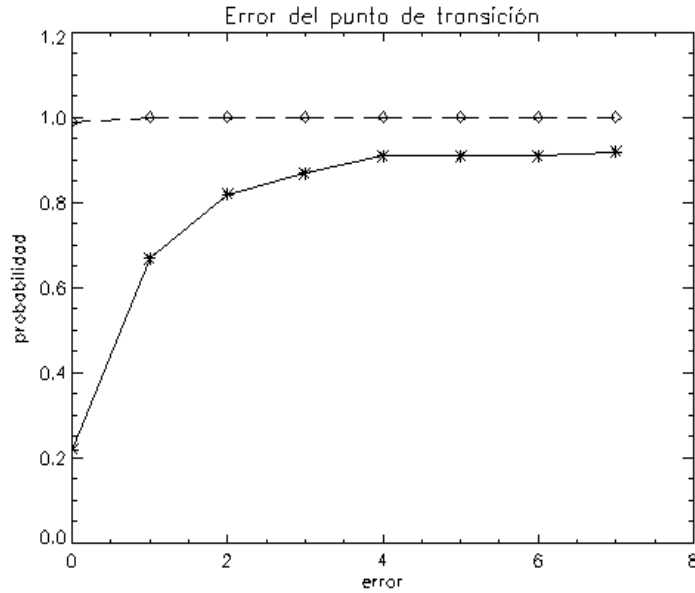


Figura 8.4: Curvas de frecuencias relativas  $f_r(k)$ , de que el error sea menor que  $k$  pixels, para los métodos MMV (línea punteada) y MDF (línea llena).

### 8.3.2. Error Global

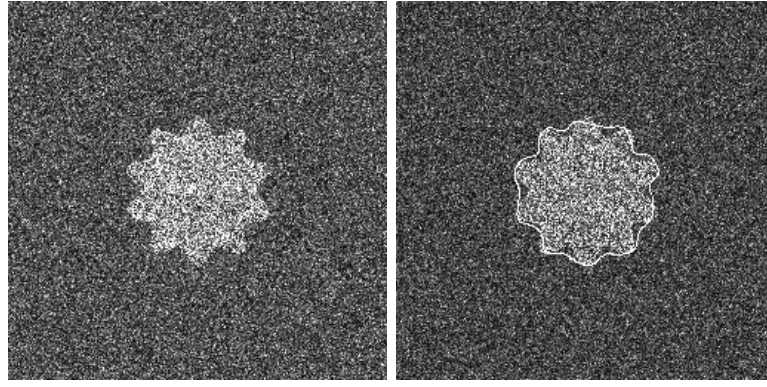
En esta sección estimamos el error global que se comete al aplicar los métodos de segmentación descritos en los capítulos 5, 6 y 7, a la familia de imágenes generadas aleatoriamente con la ecuación 8.4. Se toman 108 imágenes sintéticas de flores generadas con datos que siguen la distribución  $\mathcal{G}_A^0(\alpha, 1, 1)$ . Se utilizan los parámetros  $\alpha = -3$  para el interior de las flores y  $\alpha = -10$  para el fondo. Se calcula el error global que se comete al aproximar el contorno de la flor por la curva, como se explica en la sección 8.2. En las Figuras 8.5 y 8.6 se muestran, en la columna derecha algunas imágenes generadas con diferentes valores de los parámetros  $\delta$ ,  $\beta$  y  $\eta$ , en la columna izquierda el resultado de aplicarles el método MMV.

Se calculan los errores globales para cada método, utilizando el Algoritmo 11. El resultado, para cada uno de ellos, es un arreglo de valores correspondientes al error que se comete en cada imagen de prueba. Luego se calculan las funciones  $h^M(e_i)$  y  $h_A^M(e_i)$ ,  $i = 0, \dots, m$  usando las ecuaciones 8.9 y 8.10, respectivamente. En este caso se ha utilizado el tamaño de la partición  $\Delta = 0,05$  y 60 rectas radiales.

Las Figuras 8.7, 8.8 y 8.9 muestran los histogramas de errores  $h^M(e_i)$  para el método MMV, MDA y MDF, respectivamente. En los tres gráficos, el eje horizontal corresponde a los valores de error, el eje vertical se refiere a la cantidad de imágenes de prueba que tienen error dentro del intervalo indicado en el eje horizontal.

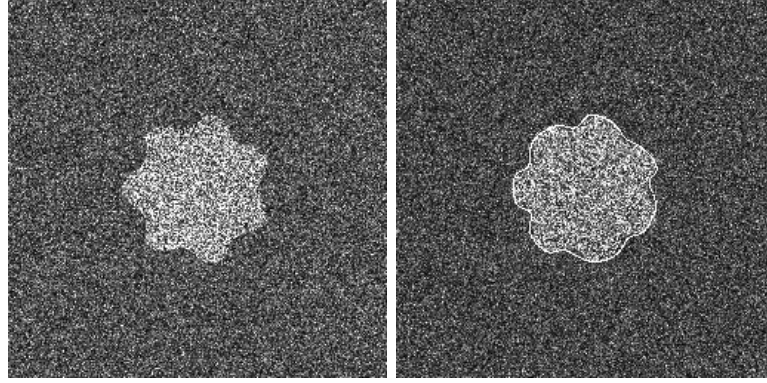
Con el objetivo de visualizar la comparación entre los errores que se comete al aplicar cada método en la estimación del contorno, se muestra la Figura 8.10, con los histogramas





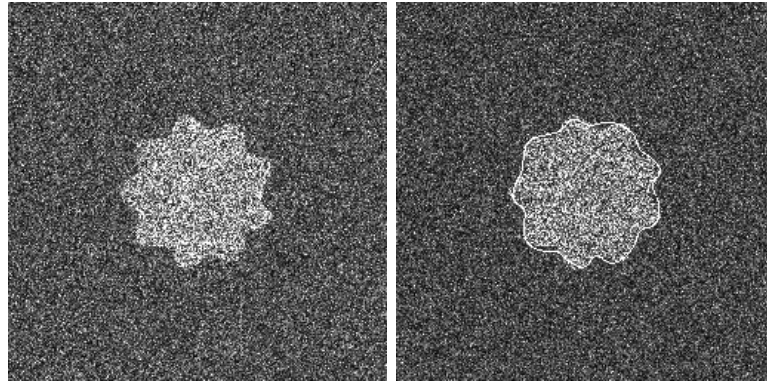
(a) Imagen sintética  $F1$ ,  $\delta = 10$ ,  
 $\beta = 45$ ,  $\eta = 6$ .

(b) Curva de ajuste  $F1$ .



(c) Imagen sintética  $F2$ ,  $\delta = 7$ ,  $\beta =$   
 $46$ ,  $\eta = 5$ .

(d) Curva de ajuste  $F2$ .

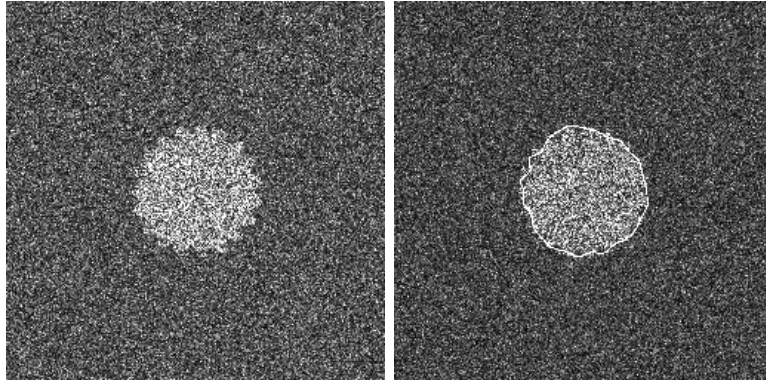


(e) Imagen sintética  $F3$ ,  $\delta = 9$ ,  $\beta =$   
 $48$ ,  $\eta = 5$ .

(f) Curva de ajuste  $F3$ .

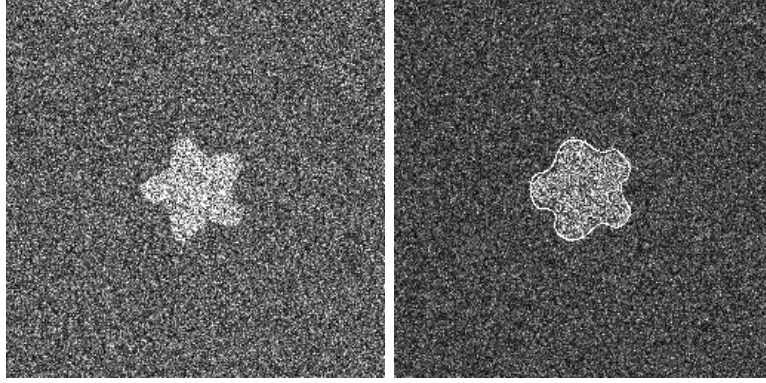
Figura 8.5: Conjunto de imágenes sintéticas generadas para medir los errores (columna izquierda) y el resultado de aplicar el método MMV para cada una (columna derecha).

para los tres métodos. Los valores de error considerados en este gráfico varían entre 0 y 1, porque son los más significativos. Se observa que, para el método MMV, la mayor parte de las imágenes tienen error menor que 0,6 mientras que para los otros métodos, la mayor parte de las imágenes tienen error mayor que 1. En la sección 8.5 se extraen conclusiones sobre el comportamiento de los métodos, según lo que indican los cálculos y los gráficos.



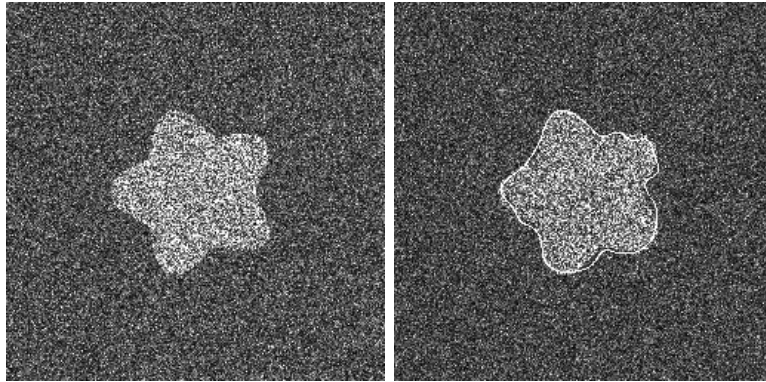
(a) Imagen sintética  $F4$ ,  $\delta = 19$ ,  
 $\beta = 42$ ,  $\eta = 3$ .

(b) Curva de ajuste  $F4$ .



(c) Imagen sintética  $F5$ ,  $\delta = 5$ ,  $\beta =$   
 $30$ ,  $\eta = 7$ .

(d) Curva de ajuste  $F5$ .



(e) Imagen sintética  $F6$ ,  $\delta = 5$ ,  $\beta =$   
 $49$ ,  $\eta = 9$ .

(f) Curva de ajuste  $F6$ .

Figura 8.6: Conjunto de imágenes sintéticas generadas para medir los errores (columna izquierda) y el resultado de aplicar el método MMV para cada una (columna derecha).

En la Figura 8.11, se muestran las curvas de error acumulado  $h_A^M(e_i)$  para cada uno de los métodos, como indica la ecuación 8.10. En este gráfico se observa, por ejemplo, que el método MMV, tiene 81 imágenes con error menor que 1, mientras que los otros dos

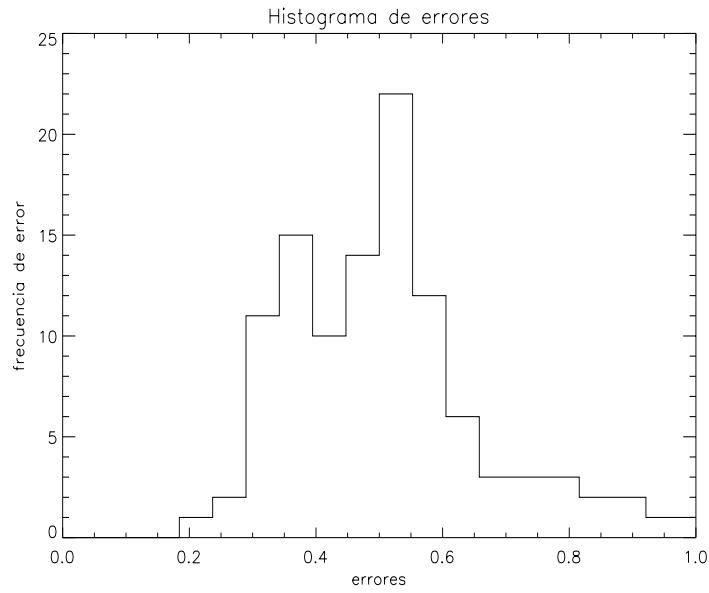


Figura 8.7: Histograma de errores correspondiente al método MMV. El eje horizontal corresponde a los valores de error, el eje vertical se refiere a la cantidad de imágenes de prueba que tienen error dentro del intervalo indicado en el eje horizontal.

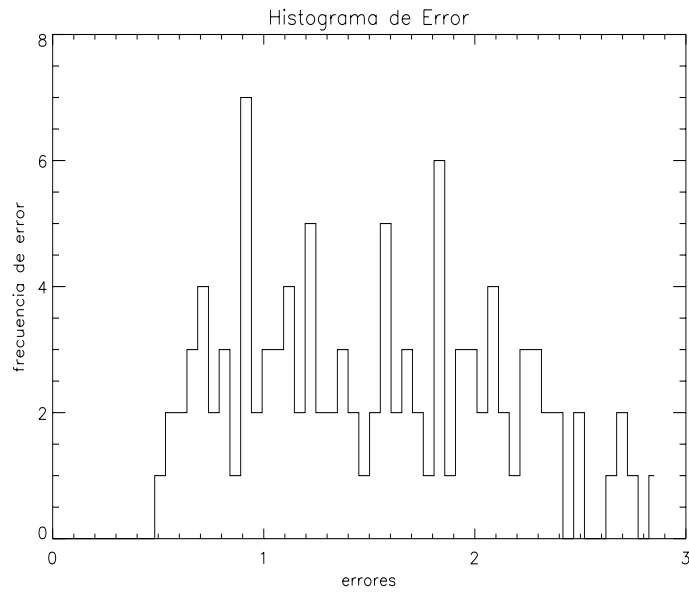


Figura 8.8: Histograma de errores correspondiente al método MDA. El eje horizontal corresponde a los valores de error, el eje vertical se refiere a la cantidad de imágenes de prueba que tienen error dentro del intervalo indicado en el eje horizontal.

métodos tienen 26 imágenes con error menor que 1. Se cumple que

$$h_A^{MMV}(e) > h_A^{MDF}(e) > h_A^{MDA}(e)$$

para  $e < 1,7$ .

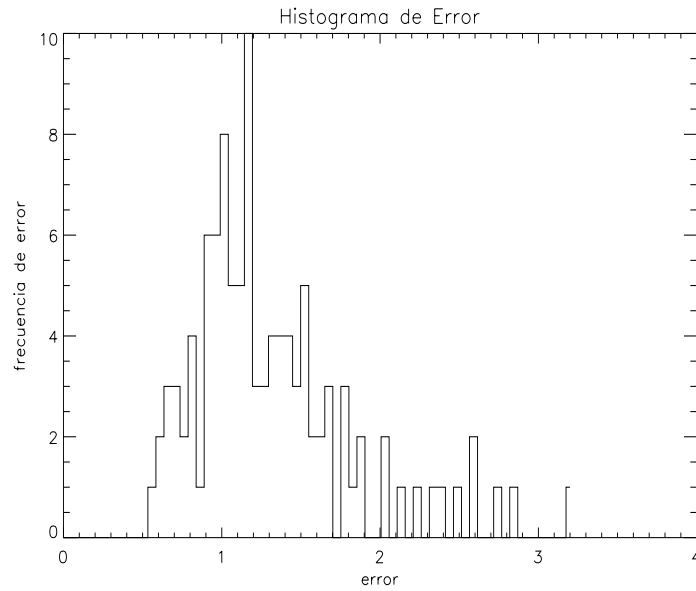


Figura 8.9: Histograma de errores correspondiente al método MDF. El eje horizontal corresponde a los valores de error, el eje vertical se refiere a la cantidad de imágenes de prueba que tienen error dentro del intervalo indicado en el eje horizontal.

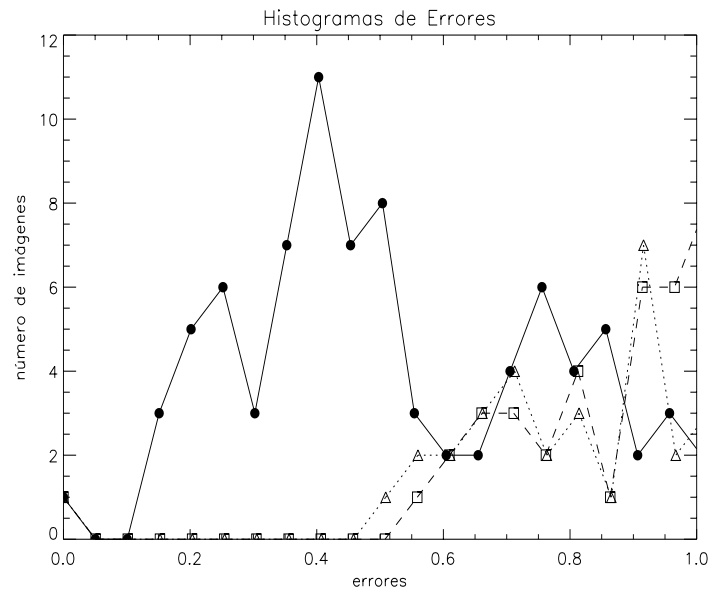


Figura 8.10: Histogramas de errores globales para cada método. La línea llena con el signo '●' corresponde al método MMV, la línea punteada con el signo '△', corresponde al método MDA, la línea rayada con el signo '□', corresponde al método MDF.

#### 8.4. Índice de dificultad para encontrar el borde

Las imágenes SAR, sintéticas o reales, poseen diferentes niveles de dificultad en la búsqueda de puntos de borde entre regiones. Esto significa que el éxito o el fracaso en la

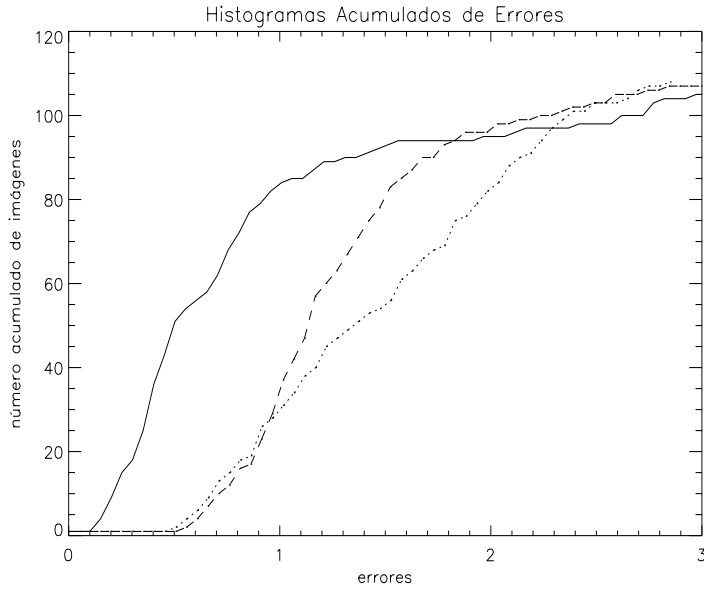


Figura 8.11: Curvas de errores acumulados para cada método. La línea llena corresponde al método MMV, la línea punteada corresponde al método MDA, la línea rayada corresponde al método MDF.

búsqueda de puntos de borde depende, no solo del método que se aplique sino también de los datos de la imagen. Por ejemplo, si consideramos dos regiones adyacentes espacialmente que posean un grado de homogeneidad parecido, o sea un valor similar del parámetro  $\hat{\alpha}$ , entonces el borde es más difícil de encontrar. Una manera de medir esta dificultad es utilizar la ecuación 8.11.

Si  $z_R$  y  $z_B$  denotan muestras de dos regiones distintas en una imagen, por ejemplo, objeto y fondo, una medida de separabilidad entre ellas es

$$t_{R,B} = \frac{(\overline{z_R} - \overline{z_B})^2}{s_{z_R}^2 + s_{z_B}^2}, \quad (8.11)$$

donde  $\overline{z}$  y  $s_z$  denotan, respectivamente, la media muestral y la desviación estándar de la muestra aleatoria  $z$ . Los valores de  $t_{R,B}$  varían entre 0 y  $+\infty$ . La dificultad de encontrar el borde entre dos regiones es inversamente proporcional a esta medida, es decir que cuanto más pequeño es el valor de  $t_{R,B}$ , más "difícil" es encontrar el borde. Por ejemplo, si  $t_{R,B} = 0$ , entonces las regiones pueden considerarse iguales.

Las Figuras 5.17(b), 5.18, 5.19 del capítulo 5, muestran ocho regiones detectadas, cuyas medidas de dificultad varían entre 4,19 (región 4, Figura 5.17(b)) y 1,18 (Figura 5.19).

De las situaciones simuladas, la que resulta más fácil de segmentar, corresponde a los valores de parámetros  $n = 5$ ,  $\alpha_R = -3$ ,  $\gamma_R = 1$ ,  $\alpha_B = -10$  and  $\gamma_B = 1$ , con  $t_{R,B} = 1,21$ . La más difícil corresponde a los parámetros  $n = 1$ ,  $\alpha_R = -7$ ,  $\gamma_R = 1$ ,  $\alpha_B = -10$  y  $\gamma_R = 1$ , para el cual  $t_{R,B} = 0,02$ . En todo este capítulo utilizamos para simular los datos, los parámetros  $n = 1$ ,  $\alpha_R = -3$ ,  $\gamma_R = 1$ ,  $\alpha_B = -10$  y  $\gamma_R = 1$ , cuyo  $t_{R,B} = 0,49$ . De esta

manera, los estudios presentados sobre imágenes simuladas corresponden a problemas que son al menos tan difíciles como los que ocurren en los casos reales.

## 8.5. Conclusiones

Este capítulo está dedicado a la evaluación del comportamiento de los métodos de maximizar la función de verosimilitud (MMV), el de suavizado con difusión anisotrópica (MDA), y el de estimación de la dimensión fractal (MDF), propuestos en los capítulos 5, 6, y 7, respectivamente. Se presentan las técnicas que se utilizan para estimar los errores locales y globales. El error local corresponde al que se comete al aproximar el punto de borde sobre un segmento de recta. El error global corresponde al que se incurre al aproximar el contorno de un objeto en la imagen por una curva de ajuste. Luego, se comparan los errores de estimación local del punto de borde, y se realiza una evaluación del error global. En ambos casos se utiliza el algoritmo de simulación de imágenes SAR sintéticas presentado en el capítulo 3, sección 3.4.3 y realizan inferencias estadísticas. Los parámetros con que se generan las muestras fueron elegidos de forma tal que las muestras generadas posean un alto grado de dificultad. No se eligieron parámetros que fueran el peor caso porque ese tipo de regiones no es lo más representativo de lo que sucede en las imágenes reales.

Con respecto al error local, se observa que en todos los gráficos comparativos la curva de frecuencia relativa del método MMV está por encima de las curvas correspondientes a los otros métodos; esto indica un comportamiento más eficiente del método MMV.

El método MMD debe ser descartado porque es muy baja la frecuencia relativa de encontrar el punto de borde con precisión, además de que tiene alto costo computacional porque debe estimarse el parámetro  $\alpha$  para cada pixel del segmento de recta. Por estas razones, en esta trabajo no lo utilizamos en imágenes SAR reales.

El método MDA exhibe muy bajo error local, sin embargo tiene muy alto costo computacional, porque deben realizarse al menos 10 iteraciones de difusión y estimar el parámetro  $\alpha$  para cada pixel, sobre cada segmento de recta.

El método MDF exhibe también muy buenos resultados. No es tan preciso en encontrar el punto de borde con exactitud, pero es muy alta la frecuencia de encontrarlo con error menor que 2 pixels. Esto es muy valioso en imágenes SAR reales donde los bordes son muy difíciles de hallar.

Con respecto al error global, podemos decir que los muy satisfactorios resultados visuales se reflejan en la estimación numérica del error. En el caso del método MMV, se observa que en el 80 % de las imágenes segmentadas tienen un error entre 0,3 y 0,6, como se ve también en el histograma de la Figura 8.7 y en el histograma conjunto de la Figura 8.10.

Para el método MDA, el 80 % de las imágenes tienen error entre 0,5 y 2,1. En el cálculo de los errores del método MDF, observamos que el 80 % de las imágenes tienen un error entre 0,8 y 2,0. Podemos ver que los errores son mayores que el método MMV, como también se observa en el histograma de la Figura 8.9.

Las curvas de histograma acumulado de la Figura 8.11 muestran que la curva del método MMV está más a la izquierda y arriba que las otras curvas y por lo tanto es más eficiente.

Como conclusión final podemos decir que el método MMV, modelando los datos con la distribución  $\mathcal{G}_A^0$  es el mejor de los métodos estudiados en esta tesis.

## Capítulo 9

# Detección de contornos en imágenes SAR polarimétricas

Las imágenes SAR polarimétricas son muy importantes debido a la gran cantidad de información que contienen. Estas imágenes están siendo utilizadas en clasificación de plantas, en el área de agricultura y también en comprensión del medio ambiente, porque proveen mayor información que las imágenes monopolarizadas. Por ejemplo, en los artículos [106], [23] y [93] los autores muestran el potencial que tienen las imágenes SAR polarimétricas con respecto a las monopolarizadas, en distintas aplicaciones. Sin embargo tienen la desventaja de que vienen dadas en 6 matrices de datos reales y complejos, y por lo tanto, la enorme cantidad de información que debe manejarse hace que la tarea de hallar las fronteras entre regiones sea muy difícil y costosa. Por estas razones, resulta de gran utilidad un algoritmo de extracción de contornos de regiones en imágenes SAR polarimétricas.

En los últimos años se han propuesto muchas técnicas de distintos tipos para segmentación y clasificación de imágenes SAR polarimétricas. Por ejemplo, en los artículos [71, 73] los autores construyen un filtro para imágenes polarimétricas con un modelo de ruido *speckle*. Otras técnicas de filtrado y reducción de ruido *speckle* fueron desarrolladas en [66], [72], [112]. En los trabajos [31, 30] los autores desarrollan una técnica de segmentación de imágenes polarimétricas utilizando la distribución Wishart compleja multivariada. En el artículo [54] se presenta un método de clasificación de imágenes SAR polarimétricas utilizando campos aleatorios de Markov.

Sin embargo, hasta ahora ninguna había sido combinada con técnicas de contornos activos.

En este capítulo se propone adaptar el algoritmo de contornos deformables desarrollado en el capítulo 5, para aplicarse en imágenes SAR polarimétricas, utilizando la distribución  $\mathcal{G}_P^H$  para modelar los datos provenientes de este tipo de imágenes. Un estudio exhaustivo de la distribución  $\mathcal{G}_P^H$  fue realizado por J. Jacobo en [59].



Este capítulo está compuesto de la siguiente manera: en la sección 9.1 se presenta una introducción sobre datos SAR polarimétricos y la forma de representarlos matemáticamente. En la sección 9.2 se introducen las distribuciones estadísticas utilizadas para modelar los datos SAR polarimétricos. En la sección 9.3 se presenta el modelo multiplicativo polarimétrico y la distribución  $\mathcal{G}_P^H$ , estimación de parámetros y generación de variables aleatorias distribuidas con distribución  $\mathcal{G}_P^H$ . En la sección 9.4 se explica el método de detección de bordes en este tipo de imágenes. En la sección 9.5 se muestran los resultados en imágenes sintéticas y reales. En la sección 9.6 se evalúa el error en el cálculo del punto de borde. Finalmente, en la sección 9.7 se presentan las conclusiones.

## 9.1. Modelo matemático para datos SAR Polarimétricos

En todo lo que sigue, las variables aleatorias se denotan con letras mayúsculas y los vectores y matrices con negritas.

En radares polarimétricos se emite una radiación electromagnética con polarización horizontal ( $h$ ) y con polarización vertical ( $v$ ). Luego se detectan las componentes horizontal y vertical de los retornos correspondientes a ambas polarizaciones emitidas. Entonces el retorno  $\mathbf{Z}$  está dado por

$$\mathbf{Z} = [Z_{hh}, Z_{hv}, Z_{vv}]^t \quad (9.1)$$

el cual es un vector aleatorio complejo que modela el retorno de la señal, donde  $Z_{ab}$  es el retorno correspondiente a emitir la radiación con polarización  $a$  y detectar la componente  $b$ .

Definimos ahora, la matriz compleja de  $3 \times 3$ ,  $\mathbf{Z}^{(n)}$  dada por

$$\mathbf{Z}^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{Z}(k) \mathbf{Z}^{*t}(k) \quad (9.2)$$

donde  $n$  es el número de *looks* y  $\mathbf{Z}(k)$  es el retorno correspondiente a cada uno de los  $n$  *looks*.

Para cada  $k$  resulta

$$\mathbf{Z}(k) = \begin{bmatrix} Z_{hh}Z_{hh}^* & Z_{hh}Z_{hv}^* & Z_{hh}Z_{vv}^* \\ Z_{hv}Z_{hh}^* & Z_{hv}Z_{hv}^* & Z_{hv}Z_{vv}^* \\ Z_{vv}Z_{hh}^* & Z_{vv}Z_{hv}^* & Z_{vv}Z_{vv}^* \end{bmatrix}$$

Esta matriz es simétrica, y cada una de las 6 componentes distintas se llama banda. Las bandas de la diagonal de la matriz son números reales, mientras que los elementos fuera de la diagonal tienen parte imaginaria distinta de 0. Las bandas se identifican de la manera que muestra el Cuadro 9.1:

Banda	imagen	tipo de dato
Banda 1	$Z_{hh}Z_{hh}^*$	real
Banda 2	$Z_{hv}Z_{hv}^*$	real
Banda 3	$Z_{vv}Z_{vv}^*$	real
Banda 4	$Z_{hh}Z_{hv}^*$	complejo
Banda 5	$Z_{hh}Z_{vv}^*$	complejo
Banda 6	$Z_{hv}Z_{vv}^*$	complejo

Cuadro 9.1: Cuadro que muestra las distintas bandas y el tipo de dato de una imagen polarimétrica.

## 9.2. Distribuciones utilizadas para modelar los datos SAR polarimétricos

En esta sección se presentan las distribuciones que se utilizan en este capítulo para modelar datos SAR polarimétricos. En primer lugar se explica brevemente la distribución Gaussiana Compleja Multivariada y luego la distribución Wishart Centrada Compleja (ver [49, 48, 117]). Esta última distribución es el modelo más utilizado en la literatura para modelar el retorno que proviene de zonas homogéneas, y sirve de base para construir las distribuciones que se utilizan para describir el retorno que proviene de zonas heterogéneas o muy heterogéneas (ver [90]).

### 9.2.1. Distribución Gaussiana Compleja Multivariada

Sea  $\mathbf{T} = [t_1, \dots, t_m]$  un vector de  $m$  variables aleatorias complejas, independientes e idénticamente distribuidas con la distribución Gaussiana Compleja Multivariada. Cada componente es de la forma  $t_k = R_k + iI_k$  donde  $R_k$  e  $I_k$  son la parte real e imaginaria respectivamente y constituyen variables aleatorias reales. Se define entonces, el vector  $\mathbf{H}$  de longitud  $2m$ , dado por  $\mathbf{H} = [R_1, I_1, \dots, R_m, I_m]$  con distribución Normal Multivariada y matriz de covarianza  $\Sigma_{\mathbf{H}}$ . Esta matriz está dada en bloques  $(\Sigma_{\mathbf{H}})_{k,\ell}$  de  $2 \times 2$  con  $k, \ell = 1, \dots, m$ , de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
(\Sigma_{\mathbf{H}})_{k,\ell} &= \mathbb{E} \begin{bmatrix} (R_k - \mu_{R_k})(R_\ell - \mu_{R_\ell}) & (R_k - \mu_{R_k})(I_\ell - \mu_{I_\ell}) \\ (I_k - \mu_{I_k})(R_\ell - \mu_{R_\ell}) & (I_k - \mu_{I_k})(I_\ell - \mu_{I_\ell}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{cases} \frac{\sigma_k^2}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{si } k = \ell \\ \frac{\sigma_k \sigma_\ell}{2} \begin{bmatrix} a_{k\ell} & -b_{k\ell} \\ b_{k\ell} & a_{k\ell} \end{bmatrix} & \text{si } k \neq \ell \end{cases} \quad (9.3)
\end{aligned}$$

donde  $\sigma_k/\sqrt{2}$  son las desviaciones estándar de cada una de las componentes del vector aleatorio  $\mathbf{H}$  y los  $a_{k\ell}$  y  $b_{k\ell}$  son los coeficientes de correlación.

Si el vector aleatorio  $\mathbf{H}$  sigue la distribución Normal Multivariada, entonces el vector aleatorio  $\mathbf{T}$  correspondiente posee una distribución Gaussiana Compleja Multivariada, hecho que se denota como  $\mathbf{T} \sim \mathcal{N}_C(\mu_{\mathbf{T}}, \Sigma_{\mathbf{T}})$ , y su función de densidad está dada por

$$f_{\mathbf{T}}(T) = \frac{1}{\pi^m |\Sigma_{\mathbf{T}}|} \exp \left( - (T - \mu_{\mathbf{T}})^{*t} \Sigma_{\mathbf{T}}^{-1} (T - \mu_{\mathbf{T}}) \right),$$

donde  $\mu_{\mathbf{T}}$  es el valor medio y la matriz de covarianza  $\Sigma_{\mathbf{T}}$  es hermitica y está dada por

$$(\Sigma_{\mathbf{T}})_{k,\ell} = \begin{cases} \sigma_k^2 & \text{para } k = \ell \\ (a_{k\ell} + j b_{k\ell}) \sigma_k \sigma_\ell & \text{para } k \neq \ell \end{cases}, \quad (9.4)$$

con  $k, \ell = 1, \dots, m$ .

La distribución Gaussiana Compleja Multivariada sirve de base para construir la distribución de Wishart Centrada Compleja, que es el modelo más utilizado para el retorno correspondiente a áreas homogéneas.

### 9.2.2. Distribución Wishart Compleja Centrada

La distribución Wishart Centrada Compleja se utiliza para modelar el ruido *speckle* en datos polarimétricos. En la misma se tienen en cuenta los  $n$  *looks* modelados como  $n$  vectores aleatorios  $\mathbf{T}(1), \dots, \mathbf{T}(n)$ , i.i.d. con  $\mathbf{T}(k) \sim \mathcal{N}_C(0, \Sigma_{\mathbf{T}})$ , cuya dimensión es  $m$ ,  $m \leq n$ .

Definimos la matriz aleatoria  $\mathbf{W}$  de tamaño  $m \times m$  por medio de la siguiente fórmula:

$$\mathbf{W} = \sum_{k=1}^n \mathbf{T}(k) \mathbf{T}(k)^{*t}. \quad (9.5)$$

La distribución conjunta de los  $m \times m$  elementos de la matriz  $\mathbf{W}$  se llama distribución de Wishart Compleja Centrada (ver [47]) y se nota  $\mathbf{W} \sim \mathcal{W}(\Sigma_{\mathbf{T}}, n)$ , donde el parámetro  $n$  indica los grados de libertad.

La función de densidad de la matriz aleatoria  $\mathbf{W}$  está dada por

$$f_{\mathbf{W}}(W) = \frac{|W|^{n-m}}{\pi^{m(m-1)/2} \Gamma(n) \cdots \Gamma(n-m+1) |\Sigma_{\mathbf{T}}|^n} \exp \left( -\text{tr}(\Sigma_{\mathbf{T}}^{-1} W) \right), \quad (9.6)$$

para  $n \geq m$  y para todo  $W \in \mathbb{C}^{m \times m}$ .

En el análisis de imágenes SAR polarimétricas con zonas homogéneas se utiliza esta distribución para describir los datos. Los parámetros que caracterizan a cada diferente región en la imagen, son los valores de la matriz dada en la ecuación (9.4).

Para estimar los parámetros de esta distribución, utilizamos las componentes de la diagonal principal de  $\mathbf{W}$ , definidas según la ecuación (9.5) y dadas por:

$$W_{i,i} = \sum_{k=1}^n |T_i(k)|^2, \quad i \in \{1, \dots, m\} \quad (9.7)$$

Las variables aleatorias

$$W_{i,i} \sim n\sigma_i^2 \Gamma(n, 2n)$$

donde

$$\sigma_i^2 = \mathbb{E} \left[ |T_i(k)|^2 \right]$$

para todo  $k = 1, \dots, n$ .

Si una variable aleatoria  $\tilde{W}$  tiene distribución  $\Gamma(n, 2n)$ , entonces  $\mathbb{E}(\tilde{W}) = 1$ , luego

$$\mathbb{E}(W_{i,i}) = n\sigma_i^2 \quad (9.8)$$

y por el método de los momentos, el estimador de  $\sigma_i$  resulta

$$\hat{\sigma}_i = \sqrt{\frac{m_1 W_{i,i}}{n}}.$$

Cuando se trata de áreas con diversos grados de heterogeneidad, en un rango entre lo homogéneo y lo heterogéneo, es necesario generalizar este modelo introduciendo la posibilidad de tener características de terreno variables, en lugar de constantes. Para este fin se propuso, en 1994 la distribución  $\mathcal{K}$  polarimétrica (ver [67]). En la práctica, se observan también datos extremadamente heterogéneos, para los cuales una propuesta más flexible es la distribución Armónica polarimétrica,  $\mathcal{G}_P^H$  que se utiliza en esta tesis.

### 9.3. El modelo multiplicativo para datos SAR Polarimétricos

Para datos SAR polarimétricos, dentro del modelo multiplicativo, el retorno  $\mathbf{Z}$  se considera como el resultado del producto entre la retrodispersión y el ruido *speckle*, y está dado por la fórmula (9.9):

$$\begin{bmatrix} Z_{hh} \\ Z_{hv} \\ Z_{vv} \end{bmatrix} = \sqrt{X} \begin{bmatrix} Y_{hh} \\ Y_{hv} \\ Y_{vv} \end{bmatrix}, \quad (9.9)$$

donde  $\mathbf{Z} = [Z_{hh}, Z_{hv}, Z_{vv}]^t$  es un vector aleatorio complejo que modela el retorno de la señal,  $\mathbf{Y} = [Y_{hh}, Y_{hv}, Y_{vv}]^t$  es también un vector aleatorio complejo que modela el ruido *speckle* y la variable aleatoria  $X$  es un escalar que modela la variabilidad de la retrodispersión debido a la heterogeneidad de la zona observada.

Sea la matriz compleja de  $3 \times 3$   $\mathbf{Z}^{(n)}$  dada por la ecuación 9.2, donde  $n$  es el número de *looks*. Entonces, podemos definir  $\mathbf{Y}^{(n)}$  como

$$\mathbf{Y}^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{Y}(k) \mathbf{Y}^{*t}(k), \quad (9.10)$$

para la variable que modela el ruido *speckle*, donde  $\mathbf{Y}(k)$  es la variable que modela el ruido *speckle* que corresponde a cada uno de los  $n$  *looks*. Entonces, de la fórmulas (9.2), (9.9) y (9.10) se obtiene

$$\mathbf{Z}^{(n)} = X \mathbf{Y}^{(n)}. \quad (9.11)$$

De las últimas ecuaciones, la formula (9.11) puede ser escrita como

$$\mathbf{Z}^{(n)} = \frac{X}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{Y}(k) \mathbf{Y}^{*t}(k) \quad (9.12)$$

donde

$$\mathbf{Y}(k) \mathbf{Y}^{*t}(k) = \begin{bmatrix} |Y_{hh}(k)|^2 & Y_{hh}(k) Y_{hv}^*(k) & Y_{hh}(k) Y_{vv}^*(k) \\ Y_{hh}^*(k) Y_{hv}(k) & |Y_{hv}(k)|^2 & Y_{hv}(k) Y_{vv}^*(k) \\ Y_{hh}^*(k) Y_{vv}(k) & Y_{hv}^*(k) Y_{vv}(k) & |Y_{vv}(k)|^2 \end{bmatrix} \quad (9.13)$$

Si consideramos que las componentes de  $\mathbf{Y}(k)$  están distribuidas con una distribución Gaussiana Compleja multivariada, entonces  $n\mathbf{Y}^{(n)}$  tendrá una distribución Wishart Compleja Centrada como se describe en la sección 9.2, entonces la función de densidad de  $\mathbf{Y}^{(n)}$  está dada por

$$f_{\mathbf{Y}^{(n)}}(\mathbf{y}) = \frac{n^{3n} |\mathbf{y}|^{n-3}}{\pi^3 \Gamma(n) \dots \Gamma(n-2) |\Sigma_{\mathbf{y}}|^n} \exp(-n \text{Tr}(\Sigma_Y^{-1} \mathbf{y})), \quad (9.14)$$

para  $n \geq 3$  y para  $Y \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ , donde  $\text{Tr}()$  es el operador traza y  $|\cdot|$  denota el determinante de la matriz.

Los distintos modelos para el retorno  $\mathbf{Z}$ , dependen de las distribuciones con las que se modela la retrodispersión  $X$ .

### 9.3.1. Versión Polarimétrica de la distribución $\mathcal{G}^H$

En esta sección se describe la distribución  $\mathcal{G}^H$  polarimétrica, en la que se considera que la retrodispersión  $X$  es una variable aleatoria con distribución Gaussiana inversa unitaria, o sea  $X \sim GI(\omega, 1)$ , como se expone en la sección 3.5, capítulo 3. El ruido *speckle* es un vector aleatorio  $\mathbf{Y}$  con distribución Wishart Compleja Centrada.

La densidad  $f_X$ , está dada por:

$$f_X(x) = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi x^3}} \exp\left(-\frac{1}{2}\omega \frac{(x-1)^2}{x}\right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x), \quad (9.15)$$

donde

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \quad (9.16)$$

y  $\omega$  es el parámetro de rugosidad, como en el caso de la distribución  $\mathcal{G}^H$  no polarimétrica (ver sección 3.5, capítulo 3).

De las fórmulas anteriores (ver [59]) podemos escribir  $f_{\mathbf{Z}^{(n)}}$  como

$$f_{\mathbf{Z}^{(n)}}(\mathbf{z}) = \frac{\sqrt{\frac{2}{n}} n^{3n} e^{\omega} \omega^{3n+1} |\mathbf{z}|^{n-3}}{\pi^3 \Gamma(n) \dots \Gamma(n-2) |\Sigma_Y|^n} \cdot \frac{K_{3n+1/2}(\sqrt{\omega(2n \text{Tr}(\Sigma_Y^{-1} \mathbf{z}) + \omega)})}{(\omega(2n \text{Tr}(\Sigma_Y^{-1} \mathbf{z}) + \omega))^{\frac{3}{2}n + \frac{1}{4}}} \quad (9.17)$$

donde  $K_\nu$  es la función modificada de Bessel de tercera clase y de orden  $\nu$ . Las funciones de Bessel modificadas del tercer tipo pueden ser calculadas mediante una fórmula cerrada dada por

$$K_{np+1/2}(\nu) = \sqrt{\frac{\pi}{2\nu}} e^\nu \sum_{k=0}^{np} \frac{(np+k)!}{k! (np-k)! (2\nu)^k}, \quad (9.18)$$

con

$$\nu = \sqrt{\omega (2n \text{Tr}(\Sigma_{\mathbf{Y}}^{-1} \mathbf{z}) + \omega)}. \quad (9.19)$$

### 9.3.2. Estimación de Parámetros

La estimación del parámetro de rugosidad  $\omega$  se calcula usando los momentos de primer y segundo orden de los elementos de la diagonal de  $\mathbf{Z}^{(n)}$  (ver [59]).

Los elementos de la diagonal principal de  $\mathbf{Z}^{(n)}$  están dados por

$$Z_{i,i}^{(n)} = \frac{X}{n} \sum_{k=1}^n |Y_{k,i}|^2, \text{ con } i \in \{hh, hv, vv\},$$

donde

$$X \sim GI(\omega, 1)$$

y

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |Y_{k,i}|^2 \sim \sigma_i^2 \Gamma(n, 2n)$$

donde  $\sigma_i^2 = \mathbb{E}[|Y_{k,i}|^2]$ , para todo  $k = 1, \dots, n$  (ver sección 9.2.2).

Por otro lado, una variable aleatoria distribuida según la ley  $\sigma_i^2 GI(\omega, 1)$  está distribuida según  $GI(\omega, \sigma_i^2)$ . Entonces puede considerarse  $Z_{i,i}^{(n)}$  como el resultado del producto de una variable aleatoria distribuida  $GI(\omega, \sigma_i^2)$  y una variable aleatoria distribuida  $\Gamma(n, 2n)$ . Esto implica que  $Z_{i,i}^{(n)}$  es una variable aleatoria distribuida según la ley  $\mathcal{G}_I^H(\omega, \sigma_i^2, n)$ .

Dada la independencia entre las variables aleatorias  $X$  e  $\mathbf{Y}$ , los momentos de orden  $r$  de  $Z_{i,i}^{(n)}$ ,  $\mathbb{E}[(Z_{i,i}^{(n)})^r]$ , se obtienen multiplicando los momentos de orden  $r$  de  $X$  y de  $\mathbf{Y}$ .

Recordando lo expuesto en la sección 3.5, se tiene que el momento de primer orden de la variable aleatoria  $Z_{i,i}^{(n)}$  es:

$$\mathbb{E}[Z_{i,i}^{(n)}] = \sigma_i \quad (9.20)$$

y el momento de segundo orden

$$\mathbb{E}[(Z_{i,i}^{(n)})^2] = \sigma_i^2 \left( \frac{\omega + 1}{\omega} \right) \left( \frac{n + 1}{n} \right) \quad (9.21)$$

entonces, llamando

$$m_{1i} = \mathbb{E}[\hat{Z}_{i,i}^{(n)}]$$

y

$$m_{2i} = \mathbb{E}[(\hat{Z}_{i,i}^{(n)})^2]$$

resulta

$$\hat{\omega}_i = \frac{1}{\frac{n-m_{2i}}{n+1} \frac{m_{2i}}{m_{1i}^2} - 1} \quad (9.22)$$

para  $i \in \{HH, HV, VV\}$ .

Adoptamos como el valor estimado del parámetro  $\omega$  el promedio de estos tres valores:

$$\hat{\omega} = \frac{\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2 + \hat{\omega}_3}{3} \quad (9.23)$$

Para obtener más detalles sobre este tema ver [59].

### 9.3.3. Interpretación de parámetros

Como en el caso de la distribución  $\mathcal{G}^H$  no polarimétrica, una característica importante de la distribución  $\mathcal{G}^H$  polarimétrica es que los valores estimados del parámetro  $\omega$  tiene una interpretación inmediata en términos de rugosidad. Valores de  $\omega$  cerca de cero, indican una zona muy heterogénea, como por ejemplo zonas urbanas. A medida que el valor de  $\omega$  crece, indica que el área de la imagen es menos heterogénea, como las zonas de bosque. Los mayores valores de  $\omega$  corresponden a zonas homogéneas, como las de pastura. Por esa razón, este parámetro se considera como una medida de la rugosidad o de la textura.

### 9.3.4. Generación de Variables Aleatorias con distribución $\mathcal{G}^H$

En esta sección se presenta el algoritmo de generación de variables aleatorias con distribución  $\mathcal{G}^H$  polarimétrica que utilizamos para generar imágenes sintéticas, las cuales permiten estimar los errores de los métodos de extracción de contornos y evaluar el comportamiento de los mismos.

Las muestras aleatorias con distribución  $\mathcal{G}^H$  Polarimétrica se generan a través del modelo multiplicativo, produciendo muestras con distribución Wishart centrada compleja para simular el ruido *speckle* y muestras con distribución Gaussiana Inversa para simular la retrodispersión.

La distribución Wishart centrada compleja se genera a partir de variables aleatorias con distribución normal multivariada compleja.

Los algoritmos se describen a continuación.

## Generación de muestras de variables aleatorias con distribución Gaussiana Multivariada

Un vector aleatorio  $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_p]^t$  posee una distribución Normal Multivariada cuando su función de densidad está dada por

$$f_{\mathbf{X}}(X) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma_{\mathbf{X}}|^{1/2}} \exp \left( -\frac{1}{2} (X - \mu_{\mathbf{X}})^t \Sigma_{\mathbf{X}}^{-1} (X - \mu_{\mathbf{X}}) \right),$$

donde  $\mu_{\mathbf{X}}$  es el vector de medias de  $\mathbf{X}$ , y  $\Sigma_{\mathbf{X}}$  es la matriz de covarianza, que es una matriz simétrica y definida positiva.

Los elementos  $s_{ij}$  de la matriz de covarianza  $\Sigma_{\mathbf{X}}$  pueden expresarse como

$$s_{ij} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j, \text{ con } 1 \leq i, j \leq p,$$

donde  $\sigma_i$  es la desviación estándar de la variable aleatoria  $X_i$ , y  $\rho_{ij}$  es el coeficiente de correlación entre  $X_i$  y  $X_j$ . Se puede verificar que  $|\rho_{ij}| \leq 1$ , que  $\rho_{ij} = \rho_{ji}$  y que  $\rho_{ii} = 1$  para todo  $1 \leq i \leq p$ .

Llamando  $\Phi_{\mathbf{X}}$  a la matriz de tamaño  $p \times p$  cuyas columnas son los vectores propios normalizados de  $\Sigma_{\mathbf{X}}$ , y llamando  $\Lambda_{\mathbf{X}}$  a la matriz diagonal formada por los  $p$  valores propios de  $\Sigma_{\mathbf{X}}$ , tenemos que

$$\Sigma_{\mathbf{X}} \Phi_{\mathbf{X}} = \Phi_{\mathbf{X}} \Lambda_{\mathbf{X}}.$$

Para la generación de valores normales multivariados  $\mathbf{X}$  con valor medio  $\mu_{\mathbf{X}}$  y matriz de covarianza  $\Sigma_{\mathbf{X}}$ , se generan valores normales  $\mathbf{Y}$  decorrelacionados y con valor medio nulo (o sea, con  $\Sigma_{\mathbf{Y}} = I$  y  $\mu_{\mathbf{Y}} = 0$ ) y se los transforma según la siguiente fórmula

$$\mathbf{X} = \Phi_{\mathbf{X}} \Lambda_{\mathbf{X}}^{1/2} \mathbf{Y} + \mu_{\mathbf{X}}.$$

## Generación de muestras de variables aleatorias con distribución Gaussiana Inversa

El Algoritmo 12 muestra la secuencia de pasos necesarios para generar muestras de variables aleatorias con distribución  $GI(\omega, \eta)$ . Para más información sobre este algoritmo ver [22].

---

**Algoritmo 12** Algoritmo de generación de variables aleatorias con distribución  $GI(\omega, \eta)$ .

---

- 1: Generar  $y$ , muestra de tamaño 1 de la variable aleatoria  $\mathbf{y} \sim \mathcal{N}(0, 1)$
  - 2: Calcular  $v = \eta + \frac{\eta y}{2\omega} - \frac{\eta}{2\omega} \sqrt{y(4\omega + y)}$
  - 3: Generar  $u$ , muestra de tamaño 1 de la variable aleatoria  $\mathbf{u} \sim \mathcal{U}_{(0,1)}$
  - 4: Si  $u > 1/(1 + v\eta)$  entonces retornar  $(\eta^2 u)^{-1}$
  - 5: Caso contrario retornar  $v$ .
- 

La Figura 9.1 muestra una imagen generada con la distribución  $\mathcal{G}^H(\omega, 1, 3)$ , con parámetros  $\omega = 3$  para el objeto y  $\omega = 10$  para el fondo. Las Figuras 9.1(a), 9.1(b)



y 9.1(c) corresponden a datos reales y las Figuras 9.1(d), 9.1(e) y 9.1(f) corresponden a datos complejos.

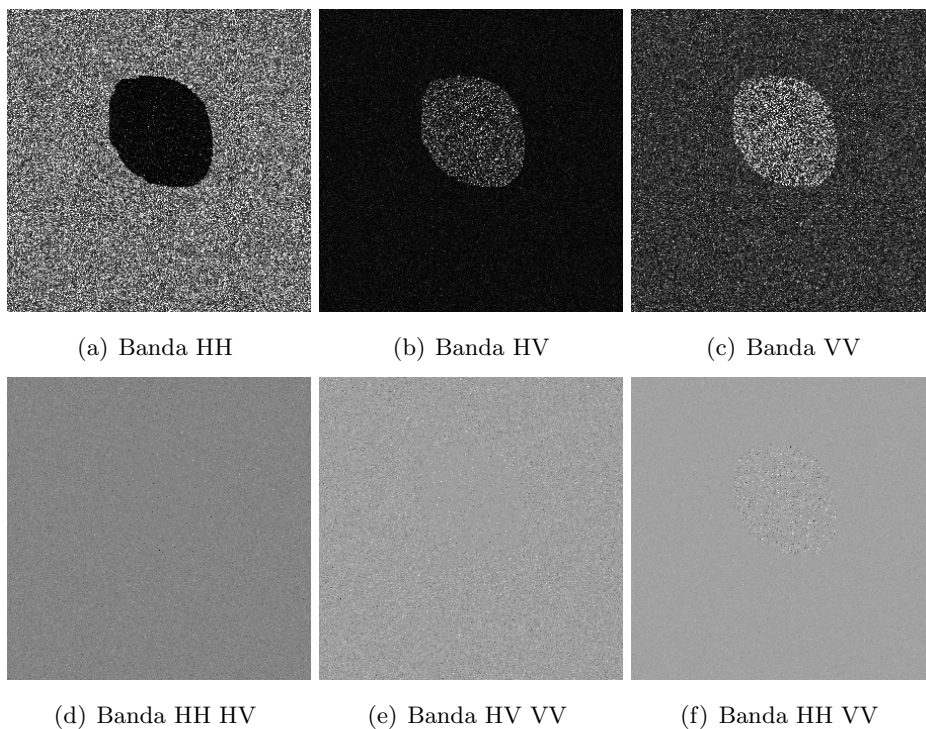


Figura 9.1: Imagen SAR polarimétrica con dos diferentes regiones, generada con la distribución  $\mathcal{G}^H(\omega, 1, 3)$  polarimétrica, con parámetros  $\omega = 3$  para el objeto y  $\omega = 10$  para el fondo.

## 9.4. Detección de Bordes

La detección de los bordes entre diferentes regiones en la imagen se realiza adaptando el algoritmo de detección del capítulo 5 para que modele, interprete y analice datos polarimétricos. El primer paso es determinar una curva inicial especificada por un polígono cuyos vértices constituyen los puntos de control de una curva B-Spline. La Figura 9.2 muestra una región inicial en la imagen de la Figura 9.1. En este ejemplo la curva fue elegida por el usuario en forma supervisada.

Si un punto pertenece al borde del objeto, entonces una muestra tomada en una vecindad del mismo, exhibe cambios significativos en los parámetros estadísticos de la distribución del modelo, y se considera un punto de transición.

Como en el caso de detección en imágenes monopolarizadas, se tienen en cuenta  $N$  segmentos  $s^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, N$  de la forma  $s^{(i)} = \overline{cP_i}$ , siendo  $c$  el centroide de la región inicial,  $P_i$  un punto fuera de la región y  $\theta = \angle(s^{(i)}, s^{(i+1)})$  el ángulo entre dos segmentos consecutivos, para todo  $i = 1, \dots, N$ , como muestra la Figura 5.4.

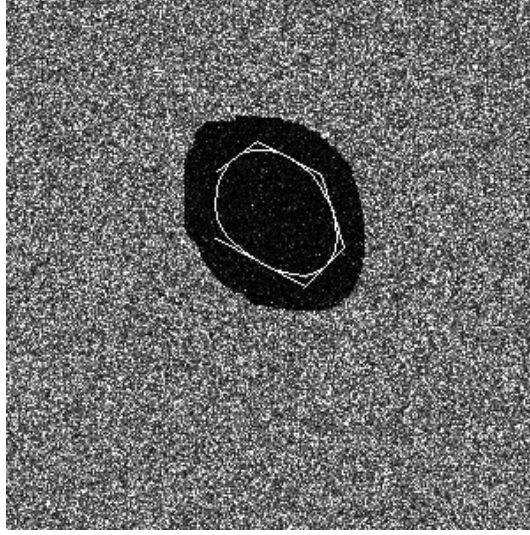


Figura 9.2: Imagen SAR polarimétrica sintética con una región inicial especificada por un polígono cuyos vértices generan una curva B-Spline.

El segmento  $s^{(i)}$  es un arreglo de  $m \times 6$  elementos provenientes de la discretización del segmento de recta tomado de la imagen SAR polarimétrica y está dado por:

$$s^{(i)} = (z_1^{(i)}, \dots, z_m^{(i)}), \quad 1 \leq i \leq N.$$

donde cada  $z_k^{(i)} \in \mathbb{C}, k = 1, \dots, m$  es un arreglo de 6 elementos, como muestra el esquema de la Figura 9.3.

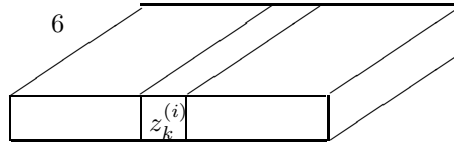


Figura 9.3: Esquema que muestra la forma de un segmento  $s^{(i)}$  sobre una imagen SAR polarimétrica.

Para cada segmento  $s^{(i)}, 1 \leq i \leq N$ , consideramos la siguiente partición

$$\begin{aligned} Z_k^{(i)} &\sim \mathcal{G}^H(\omega_r, \eta_r, n), \quad k = 1, \dots, j \\ Z_k^{(i)} &\sim \mathcal{G}^H(\omega_b, \eta_b, n), \quad k = j + 1, \dots, m \end{aligned}$$

donde para cada  $k$ , con  $1 \leq k \leq m$ ,  $z_k^{(i)}$  es la realización de la variable aleatoria  $Z_k^{(i)}$ . Los parámetros  $(\omega_r, \eta_r)$  y  $(\omega_b, \eta_b)$  caracterizan a la región y al fondo respectivamente.

Para encontrar el punto de transición sobre cada segmento  $s^{(i)}$ , se estima el parámetro  $\omega$  de la distribución  $\mathcal{G}^H$ , para cada pixel del segmento, utilizando los datos de una ventana deslizante de  $20 \times 20$  centrada en cada punto del segmento y los estimadores de orden 1 y 2. Entonces se obtiene  $\hat{\Omega}^{(i)} = (\hat{\omega}_1, \dots, \hat{\omega}_m)$  los parámetros estimados, correspondientes a la

muestra tomada sobre el segmento  $s^{(i)}$ . Luego se busca la máxima discontinuidad dentro del arreglo de  $\hat{\Omega}^{(i)}$ , convolucionando con la máscara  $[-2, -1, 0, 1, 2]$ .

Una vez que se encuentra el conjunto de puntos  $\{b_1, \dots, b_N\}$ , se construye la curva B-Spline interpolante como se explica en el capítulo 4.

El Algoritmo 13 muestra un resumen del proceso para hallar el contorno de una región.

---

**Algoritmo 13** Algoritmo de detección de contornos en imágenes SAR polarimétricas

---

- 1: Determinar una región de interés por medio de una curva B-Spline.
  - 2: Determinar una serie de segmentos radiales sobre la imagen.
  - 3: **for** cada segmento  $s^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, N$  **do**
  - 4:   Estimar el parámetro  $\omega$  para cada pixel del segmento  $s^{(i)}$ ,  
obteniendo el arreglo  $\hat{\Omega}^{(i)} = [\hat{\omega}_1, \dots, \hat{\omega}_m]$ .
  - 5:   Detectar el punto de máxima discontinuidad sobre el arreglo  $\hat{\Omega}^{(i)}$  convolucionando  
con un operador de detección de bordes.
  - 6: **end for**
  - 7: Construir la B-Spline que interpola los puntos encontrados.
- 

## 9.5. Resultados

La Figura 9.4 muestra el resultado de aplicar el Algoritmo 13 a la imagen de la Figura 9.1, se observa que la curva ajusta muy bien al borde del objeto.

La Figura 9.5 muestra el comportamiento del parámetro  $\omega$  sobre un segmento de recta  $s^{(i)}$ , la Figura 9.5(a) corresponde a los valores típicos del arreglo  $\hat{\Omega}^{(i)}$  de estimadores del parámetro  $\omega$  para cada segmento  $s^{(i)}$ , la Figura 9.5(b) muestra la variación del arreglo  $\hat{\Omega}^{(i)}$ . Puede observarse que la posición de mayor variación coincide en ambos gráficos.

La Figura 9.6 muestra el resultado de aplicar el Algoritmo 13 a una imagen SAR real polarimétrica de 3 *looks*. La Figura 9.6(a) muestra la imagen original mientras que la Figura 9.6(b) muestra la región detectada por el algoritmo.

La Figura 9.7 muestra el resultado de aplicar el Algoritmo 13 a la misma imagen, utilizando 4 regiones iniciales.

## 9.6. Evaluación del error en el cálculo del punto de borde

De la misma manera en que se estimaron los errores de aproximación para imágenes SAR monopolarizadas (Capítulo 8), hemos evaluado el error de encontrar el punto de borde en imágenes SAR polarimétricas. En esta sección se evalúa el error local en la determinación del punto de borde sobre un segmento de recta para el método propuesto, utilizando el Algoritmo 10, de la sección 8.1.

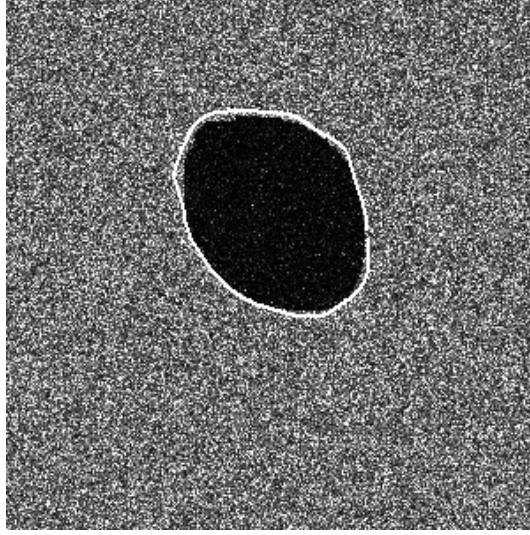


Figura 9.4: Resultado de aplicar el Algoritmo 13 a la imagen sintética de la Figura 9.1, utilizando la región inicial que se muestra en la Figura 9.2.

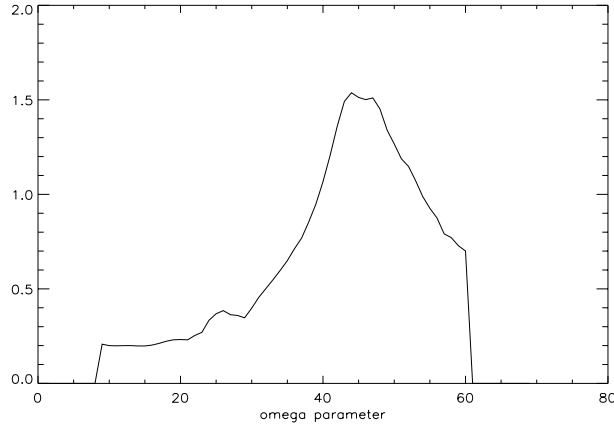
Recordamos que el resultado de aplicar este procedimiento es un arreglo de valores correspondientes a las frecuencias relativas de que el punto de borde se encuentre a una distancia menor que  $k$  pixels, con  $k \in \mathbf{N}$ ,  $k \geq 0$ . Los valores de  $k$  cercanos a cero son los que deben tomarse en cuenta para evaluar el método. En este caso hemos considerado  $k \leq 10$ . Para poder visualizar esta información, graficamos el arreglo de frecuencias relativas de cada método  $f_r^M(k)$  con una curva.

El gráfico de la Figura 9.8 muestra la curva correspondiente. El valor en el eje vertical es la frecuencia relativa de encontrar el punto de transición con error menor que el número indicado en el eje horizontal. Por ejemplo la frecuencia relativa de encontrar el punto de transición con exactitud (error 0 pixel) es 0,11. Se observa que la precisión de encontrar el punto de borde es baja. Esto es por la complejidad que este tipo de imágenes conlleva.

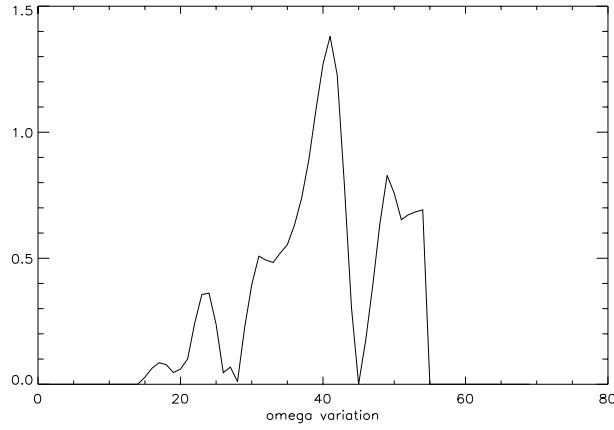
## 9.7. Conclusiones

Las imágenes SAR polarimétricas son muy difíciles de analizar por su gran complejidad. Por esa razón resulta muy útil un algoritmo de interpretación de las mismas. En este capítulo se presenta un nuevo enfoque para detección de contornos en imágenes SAR polarimétricas usando contornos B-Spline deformables.

En el primer paso se determinan regiones de interés que corresponden a áreas con diferentes grado de homogeneidad, como una primera aproximación gruesa, que sirve para establecer la zona dentro de la cual se realiza la búsqueda del contorno de las diferentes regiones. Luego se modela los datos con la distribución  $\mathcal{G}^H$  polarimétrica, sobre una serie de segmentos de recta estratégicamente dispuestos alrededor de la curva inicial. Se analizan los datos sobre los pixels de cada segmento, estimando los parámetros que caracterizan



(a) Valores típicos del parámetro  $\omega$



(b) Variación del parámetro  $\omega$ .

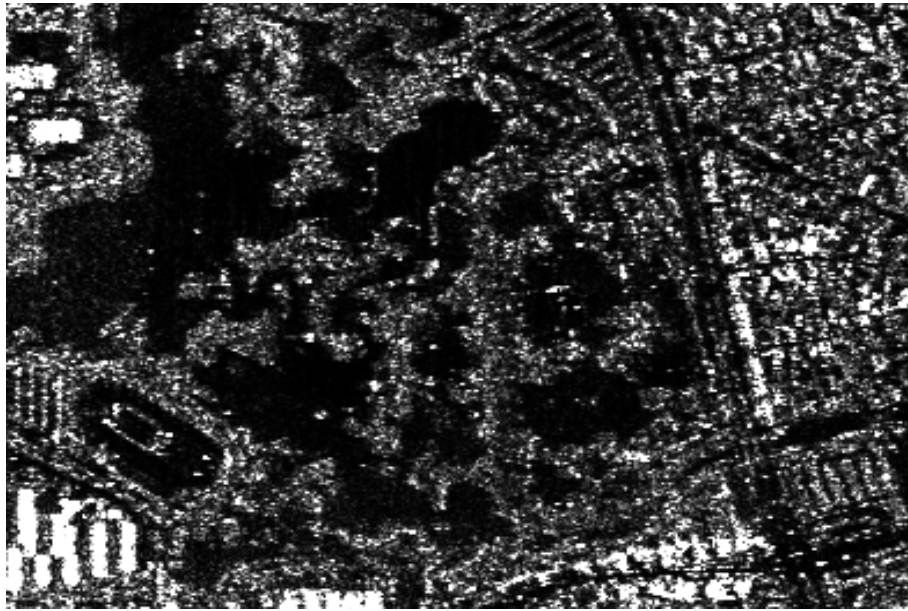
Figura 9.5: Comportamiento del parámetro  $\omega$  sobre un segmento de recta  $s^{(i)}$

a las diferentes regiones. Utilizando los estimadores, se calculan los puntos de borde y se contruye la curva B-Spline que los interpola.

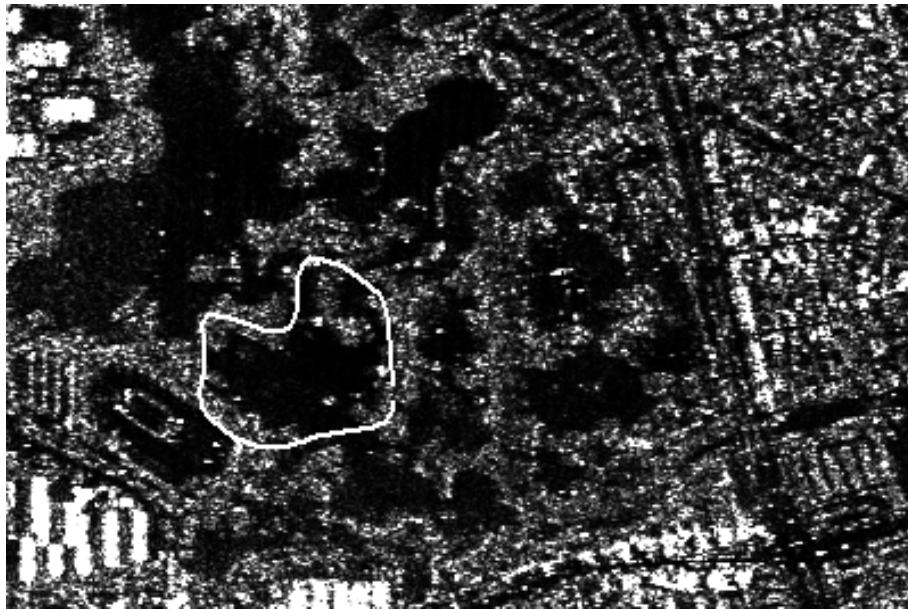
Este proceso trabaja solamente sobre una parte de la imagen, lo cual significa un gran ahorro de costo computacional dada la enorme cantidad de datos que tienen las imágenes SAR polarimétricas.

Para cada región, el resultado de la aplicación del algoritmo es una curva dada por una fórmula matemática expresada en término de funciones B-Spline. Los resultados, con imágenes sintéticas y reales son muy buenos, con un aceptable costo computacional.

También en este capítulo se evalúa la capacidad del método de encontrar los puntos de borde con precisión. En este punto hay una deficiencia. Como trabajo futuro pensamos utilizar también el parámetro  $\eta$  de la distribución  $\mathcal{G}^H$  para poder obtener mejores resultados en el cálculo de los puntos de borde.



(a) Imagen real SAR polarimétrica de 3 *looks*.



(b) Resultado de aplicar el algoritmo de segmentación.

Figura 9.6: Resultado de aplicar el Algoritmo 13 a una imagen real SAR polarimétrica de 3 *looks*.



Figura 9.7: Resultado de aplicar el Algoritmo 13 a una imagen real SAR polarimétrica de 3 *looks*, con 4 regiones iniciales.

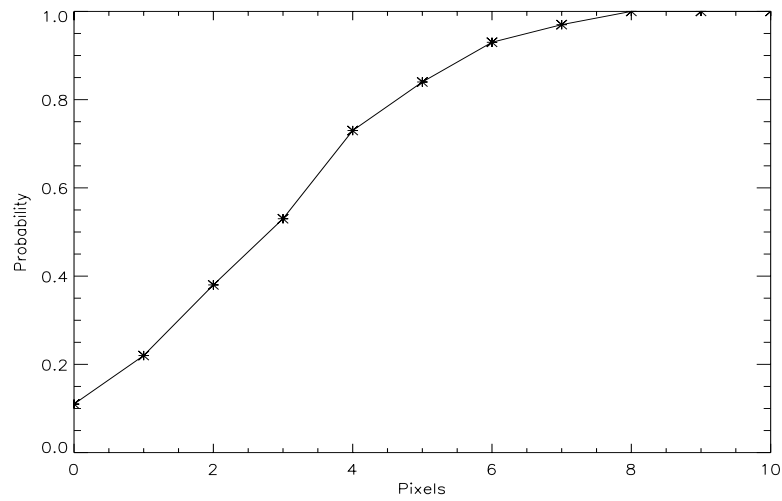


Figura 9.8: Gráfico que muestra la curva de frecuencias relativas  $f_r(k)$  de que el error sea menor que  $k$  pixels ( $k = 0, \dots, 10$ ), con la distribución  $\mathcal{G}^H$  polarimétrica.

## Capítulo 10

# Conclusiones, Trabajos Publicados y Trabajos Futuros

### 10.1. Conclusiones

Las imágenes de Radar de Apertura Sintética tanto monopolarizadas como polarimétricas, son de suma importancia en la comprensión y entendimiento del medio ambiente, porque puede obtenerse información que ningún otro tipo de imágenes posee. Sin embargo, tienen la desventaja de que son muy difíciles de analizar e interpretar. Hallar el contorno de regiones es una tarea particularmente complicada debido a la presencia del ruido *speckle* que corrompe la imagen e impide encontrar los puntos de la frontera entre diferentes regiones. De ahí el interés en el desarrollo de métodos de procesamiento de imágenes SAR.

En esta tesis proponemos una serie de algoritmos de detección de contornos en imágenes SAR monopolarizadas y polarimétricas. Los métodos que proponemos no intentan eliminar el ruido *speckle*, sino que toman ventaja de sus propiedades estadísticas modelando los datos SAR con las distribuciones estadísticas  $\mathcal{G}_A^0$  y  $\mathcal{G}^H$  para datos monopolarizados y polarimétricos, respectivamente. Ambas distribuciones están basadas en el modelo multiplicativo.

Estos algoritmos son utilizados para detectar el contorno de regiones con diferentes grados de homogeneidad, los cuales están determinados por el parámetro de rugosidad de las distribuciones estadísticas  $\mathcal{G}_A^0$  y  $\mathcal{G}^H$ . Las regiones pueden ser homogéneas (como las de pastura), regiones heterogéneas (como las de bosque) y regiones muy heterogéneas (urbanas).

Esta tesis nos permitió desarrollar, estudiar y comparar diferentes métodos de extracción de contornos en imágenes SAR y realizar estudios sobre los siguientes puntos:

1. Proponer un algoritmo de búsqueda automática de regiones iniciales que consisten en una curva B-Spline, alrededor de la cual se aplican los métodos para hallar puntos



de borde. Las regiones iniciales se utilizan como curva de aproximación inicial al contorno que se desea encontrar y tienen el objetivo de que los métodos de detección de bordes tengan más rápida convergencia y menor costo computacional.

2. Utilizar modelos matemáticos para describir los datos de radar de apertura sintética, estimar los parámetros de rugosidad y utilizarlos para hallar puntos de borde entre distintas regiones. Los puntos de frontera los encontramos en un entorno de la región inicial, de esta forma se evita recorrer toda la imagen, ahorrando costo computacional.
3. Para representar el contorno de las regiones encontradas utilizamos la representación B-Spline para curvas, porque tiene muy pocos parámetros (los puntos de control) y es intrínsecamente suave.
4. Los algoritmos tienen problemas de convergencia que dependen de la forma del objeto, para solucionarlos planteamos un algoritmo alternativo de búsqueda de contornos de objetos en la imagen que exhibe mejores resultados.
5. En la estimación de los parámetros de las distribuciones consideradas se producen errores provenientes de las operaciones o de la estimación y muchas veces es necesario suavizar el arreglo de estimadores para encontrar el punto de discontinuidad con mayor precisión. En este trabajo se aplica el proceso de difusión anisotrópica con el objetivo de eliminar componentes espúreas en el arreglo de estimadores y encontrar puntos de borde con fidelidad.
6. Utilizamos otros descriptores de la rugosidad de una zona de la imagen, como la estimación de la dimensión fractal: la dimensión Box Counting y la dimensión Box Counting Diferencial, como índice de irregularidad de cada región. Esto permite realizar comparaciones y separar regiones con diferentes grados de homogeneidad.
7. Por medio de una experiencia de Monte Carlo realizamos comparaciones entre los métodos propuestos y evaluamos el comportamiento de los mismos, estimamos el error local y también el error global que se comete al aproximar el contorno de un objeto por la curva encontrada, utilizando imágenes especialmente diseñadas para este fin. Esto permitió verificar la validez y aplicabilidad de los métodos desde un punto de vista estadístico.
8. Las observaciones muestran que encontrar los puntos de borde caracterizando los datos con la distribución  $\mathcal{G}_A^0$  y maximizando la función de verosimilitud, es la mejor de las opciones en precisión y costo computacional.
9. Desarrollar un nuevo algoritmo de segmentación de imágenes SAR polarimétricas.
10. Todos los algoritmos fueron rigurosamente probados en imágenes sintéticas y reales. Las ventajas que tienen los métodos propuestos son las siguientes:

- Encuentran el contorno de regiones con precisión.

- El resultado es una ecuación paramétrica del contorno de la región que se desea encontrar.
- No depende de la región inicial de búsqueda.
- Posee bajo costo computacional.

De esta manera, esta tesis contribuyó al conocimiento del análisis de imágenes de radar de apertura sintética con una poderosa herramienta: contornos B-Spline deformables, modelando los datos con la familia de distribuciones  $\mathcal{G}$  y otros descriptores de datos SAR.

## 10.2. Trabajos Publicados

Todos los resultados de esta tesis fueron publicados en congresos nacionales, internacionales y revistas especializadas en el tema de procesamiento de imágenes SAR. En esta sección exhibimos el detalle de las publicaciones.

### 1. REVISTAS

**2004** Gambini, J., Mejail, M., Jacobo Berllés, J. y Frery, A. "Feature Extraction in Speckled Imagery using Dynamic B-Spline Deformable contours under the  $\mathcal{G}^0$  Models." IJRS International Journal of Remote Sensing. Revista indexada, 2004 Impact Factor: 1.128. <http://www.tandf.co.uk/journals/titles/01431161.asp> Manuscript ID TRES-PAP-2004-0172. Evaluado y aceptado para su publicación.

### 2. ACTAS DE CONFERENCIA

**2006** María E. Buemi, Marta E. Mejail, Julio C. Jacobo, María J. Gambini, "Adaptive Stack Filters in Speckled Imagery." International Conference on Computer Vision Theory and Applications (Visapp 2006). Febrero 2006, Setúbal, Portugal. ISBN: 972-8865-40-6.

**2005** María E. Buemi, Juliana Gambini, Marta Mejail, Julio Jacobo Berllés, "Estudio de la Performance de Filtros Stack Adaptativos en Clasificación de Imágenes Afectadas por Ruido Speckle." 2DO Congreso Iberoamericano de Estudiantes de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Computación (II CIBELEC 2005), Puerto La Cruz, Venezuela.

**2005** Gambini, M. J., Mejail, M., C., Jacobo Berlles, J., A. Frery, "Polarimetric SAR Region Boundary Detection using B-Spline Deformable Countours under the  $\mathcal{G}$  Model." XVII Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing (SIBGRAPI)/ II Ibero-American Symposium on Computer Graphics (SIACG), Natal, Brasil. Octubre de 2005. Editor IEEE Press.

**2005** Buemi, M.E., Gambini, J., Mejail, M., Jacobo Berllés, J. "Segmentación de Imágenes SAR usando Filtros Stack y Curvas B-Spline." XI Congreso Argentino de

Ciencias de la Computación, 17-21 de octubre, Concordia, Entre Ríos, Argentina. Trabajo aceptado para su publicación en los proceedings correspondientes.

**2005** M. Mejail, J. Gambini, C. Delrieux, "Diseño Curricular de Postgrado en Ciencias de las Imágenes." Primeras Jornadas de Educación en Informática y TICs en Argentina (JEITICs 2005), Bahía Blanca, Pcia de Buenos Aires, Argentina.

**2005** Buemi, M., Gambini, M. J., Mejail, M., Jacobo Berlles, J., "Filtro stack aplicado a Imágenes con ruido speckle." Workshop de Investigadores en Ciencias de la Computación (WICC 2005), Río Cuarto, Cordoba, Argentina. ISBN N°: 950-665-337-2, Fecha de catalogación: 19/08/2005.

**2004** Gambini, M. J., Mejail, M., Jacobo Berlles, J., Frery, A., Muller, H., "Automatic Contour Detection in SAR images." European Conference on Synthetic Aperture Radar, EUSAR 2004, Ulm, Germany, del 25 al 27 de mayo de 2004. Publicado en los Proceedings - 5th European Conference on Synthetic Aperture Radar 2004, 1052 Seiten in 2 Bänden, DIN A4, Kartoniert. ISBN 3-8007-2828-1 198,00 EUR, Páginas: 993-996

**2004** Gambini, M. J., Mejail, M., Delrieux, C. , Jacobo Berlles, J. "SAR images Segmentation through B-Spline Deformable Contours and Fractal Dimension." International Society for Photogrammetry and Remote Sensing, ISPRS 2004, Istanbul, Turkey, del 15 al 23 de julio de 2004. Publicado en los Proceedings correspondientes. pp. 1159-1163

**2004** Wasserman, D., Mejail, M., Gambini, M. J., Buemi, M.E. "Segmentation with Active Contours: a comparative study of B-Spline and Level Set Methods." XVII Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing (SIBGRAPI)/ II Ibero-American Symposium on Computer Graphics (SIACG). Curitiba, PR, Brazil, 17 al 20 de octubre de 2004. IEEE Press.

**2004** Gambini, M. J., Mejail, M. , Delrieux, C. , Jacobo Berlles, J., Buemi, M.E. "Contornos Activos en Imágenes SAR por medio de Dimensión Fractal." Presentado en el simposio Simposio Argentino de Tecnología, AST 2004, realizado en el marco de las 33 Jornadas Argentinas de Informática e Investigación Operativa (JAIIO 2004). Facultad de Matemática Astronomía y Física (FAMAF) de la Universidad Nacional de Córdoba, desde el 20 al 24 de septiembre. Córdoba, Argentina.

**2004** Abbate, H., Buemi, M., Gambini, J., Delrieux, C., "Clasificación y Segmentación de Texturas usando Dimensión Fractal y Contornos B-Spline Deformables". X Congreso Argentino de Ciencias de la Computación, Universidad Nacional de La Matanza, Octubre de 2004, San Justo, Buenos Aires, Argentina.

**2003** D. Wasserman, A. Katz, J. Gambini, J. Jacobo Berlles, M. Mejail, "Real Time Object Tracking for the Mirobot League robot football: a B-Spline approach." 2003 FIRA Congress, Fira robot soccer world, del 1 al 3 de octubre de 2003, Vienna, Austria. Publicado en los Proceedings correspondientes.

**2003** A. Katz, D. Wasserman, J. Gambini, J. Jacobo Berlles, M. Mejail, "Seguimiento en tiempo real de objetos identificados por figuras conocidas mediante visión global." Presentado en el simposio AST 2003, en el marco de las 32<sup>a</sup> Jornadas Argentinas de Informática e Investigación Operativa (JAIIO 2003), del 1 al 5 de septiembre de 2003. Publicado en los Proceedings correspondientes.

**2002** Jacobo Berlles, J., Gambini, M. J., Mejail, M., Muller, H., Frery, A., "B-Spline Curve Fitting in SAR Images." European Conference on Synthetic Aperture Radar, EUSAR 2002 Cologne, Germany. Publicado en los Proceedings correspondientes.

**2002** María J. Gambini, Julio C. Jacobo Berlles, Marta E. Mejail and Alejandro C. Frery, "SAR Image Segmentation Using B-Spline Deformable Contours." VIII Congreso Argentino de Ciencias de la Computación, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales-UBA, Buenos Aires, Argentina.

**2000** Scolnik, H. D. y Gambini, M. J., "Un Método para el cálculo de derivadas segundas." VI Congreso Argentino de Ciencias de la Computación, Universidad de la Patagonia. CACIC 2000, Usuahia, Argentina, Octubre de 2000 (editado en CD).

**2000** H.-J.Muller, J. Jacobo-Berlles, M. Mejail, A.C. Frery and M. J. Gambini, "The Harmonic Distribution as a Model for SAR Images." IX Latin American Symposium on Remote Sensing, Puerto Iguazú, Misiones, Argentina. Noviembre 2000.

### 10.3. Trabajos Futuros

Los métodos propuestos tienen resultados muy satisfactorios, pero poseen algunas deficiencias que podrían ser importantes dependiendo del problema que se esté tratando. Algunas desventajas son las siguientes:

- Es necesario una región inicial por cada región que se desee encontrar en la imagen; esto significa que el método no permite cambios en la topología de la curva inicial.
- El resultado es un contorno determinado por una curva B-Spline, por lo tanto las esquinas son redondeadas. Esto provoca que la curva no ajuste al contorno de la región en los puntos en los que el borde no es derivable.

Hemos pensado que estos problemas pueden solucionarse adaptando los algoritmos de conjuntos de nivel en imágenes SAR, utilizando la familias de distribuciones  $\mathcal{G}$  para modelar los datos.

Con respecto a las imágenes SAR polarimétricas, es posible desarrollar un método de búsqueda automática de regiones iniciales. También, es importante hallar los puntos de borde con mayor precisión. Para eso, es posible utilizar las distribuciones  $\mathcal{G}$  polarimétricas cambiando el método de búsqueda de puntos de borde, utilizando por ejemplo, el algoritmo de máxima verosimilitud propuesto en el capítulo 5. También es posible estimar la dimensión fractal y utilizarla como descriptor en las distintas bandas.



## Apéndice A

# Propiedades de Convergencia de las Distribuciones

En las siguientes propiedades se verán las convergencias para las distintas distribuciones involucradas en este trabajo [40].

1. La distribución raíz cuadrada de Gamma converge en probabilidad hacia una constante, es decir,  $\Gamma^{1/2}(\alpha, \lambda) \xrightarrow{\text{Pr}} \beta_1^{1/2}$  cuando  $\alpha, \lambda \rightarrow \infty$  y  $\frac{\alpha}{\lambda} \rightarrow \beta_1$
2. La distribución recíproca de la raíz cuadrada de Gamma converge en probabilidad hacia una constante, es decir,  $\Gamma^{-1/2}(\alpha, \gamma) \xrightarrow{\text{Pr}} \beta_2^{-1/2}$  cuando  $-\alpha, \gamma \rightarrow \infty$  y  $\frac{\alpha}{\gamma} \rightarrow \beta_2$
3. La distribución raíz cuadrada de la gaussiana inversa generalizada converge en distribución a las siguientes distribuciones:
  - a)  $N^{-1/2}(\alpha, \gamma, \lambda) \xrightarrow{D} \Gamma^{1/2}(\alpha, \lambda)$  cuando  $\gamma \downarrow 0$  y  $\alpha, \lambda > 0$
  - b)  $N^{-1/2}(\alpha, \gamma, \lambda) \xrightarrow{D} \Gamma^{-1/2}(\alpha, \gamma)$  cuando  $\lambda \downarrow 0$  y  $-\alpha, \gamma > 0$
4. La distribución  $\mathcal{G}_A^0$  converge en distribución a raíz cuadrada de Gamma,  $\mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, n) \xrightarrow{D} \Gamma^{1/2}(n, n\beta_2)$  cuando  $-\alpha, \gamma \rightarrow \infty$  y  $\frac{\alpha}{\gamma} \rightarrow \beta_2$
5. La distribución  $\mathcal{G}_A$  converge en distribución a las siguientes distribuciones:
  - a)  $\mathcal{G}_A(\alpha, \gamma, \lambda, n) \xrightarrow{D} \mathcal{K}_A(\alpha, \lambda, n)$  cuando  $\gamma \downarrow 0$  y  $\alpha, \lambda > 0$
  - b)  $\mathcal{G}_A(\alpha, \gamma, \lambda, n) \xrightarrow{D} \mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, n)$  cuando  $\lambda \downarrow 0$  y  $-\alpha, \gamma > 0$



## Apéndice B

# Densidad del Retorno $Z$

Proposición:

Sean  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  variables aleatorias tales que,  $X$  e  $Y$  son independientes y  $Z$  es una función de  $X$  e  $Y$ . Entonces la función de densidad de  $Z$  viene dada por:

$$f_Z = f_X\left(\frac{z}{y}\right)f_Y(y)\frac{1}{y}$$

Demostración:

Sea  $Z = XY$ , consideremos la variable aleatoria condicional  $W = Z/Y = y$  para cada valor  $y$  en el espacio muestral. La función de distribución acumulada de  $W$  es, para cada valor  $y$  :

$$F_W(w) = \Pr(W \leq w) = \Pr(y \cdot X \leq w) = \Pr(X \leq \frac{w}{y}) = F_X\left(\frac{w}{y}\right)$$

luego, la función de densidad de  $W$  viene dada por:

$$f_W(w) = f_X\left(\frac{w}{y}\right)\frac{1}{y}$$

Consideremos la distribución conjunta  $(Z, Y)$  cuya densidad es:

$$f_{ZY}(z, y) = f_W(z)f_Y(y)$$

entonces la función de densidad de  $Z$  viene dada por:

$$f_Z(z) = \int f_{ZY}(z, y)dy = \int f_W(z)f_Y(y)dy = \int f_Z\left(\frac{z}{y}\right)\frac{1}{y}f_Y(y)dy$$

Definición: Una variable aleatoria  $X$  tiene distribución *Beta* con parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , y se denota  $X \sim \mathcal{B}(\alpha, \beta)$ , si su función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

donde  $\alpha > 0$  y  $\beta > 0$ .



Proposición: Sean  $X_1$  y  $X_2$  dos variables aleatorias independientes tales que  $X_1 \sim \Gamma(\alpha_1, 1)$  y  $X_2 \sim \Gamma(\alpha_2, 1)$ , entonces las variables aleatorias  $Y_1 = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$  y  $Y_2 = X_1 + X_2$  son independientes y cumplen que  $Y_1 \sim \mathcal{B}(\alpha_1, \alpha_2)$  y  $Y_2 \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, 1)$ . ( $\mathcal{B}$  es la distribución Beta)

Proposición:

Sean  $X$  y  $Y$  dos variables aleatorias independientes tales que  $X \sim \Gamma(\alpha, 1)$  y  $Y \sim \mathcal{B}(\beta, \beta - \alpha)$ , con  $0 < \alpha < \beta$ , entonces  $XY$  y  $X(1 - Y)$  son variables aleatorias con distribución  $\Gamma(\beta, 1)$  y  $\Gamma(\beta - \alpha, 1)$  respectivamente.

Proposición:

Si  $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$  entonces  $kX \sim \Gamma(\alpha, k\beta)$ .

Proposición:

Si  $(U_1, \dots, U_k)$  son variables independientes e idénticamente distribuidas con distribución  $\mathcal{U}(0, 1)$  y si  $\alpha = k \in \mathbb{N} - \{0\}$  y  $\beta = 1$  entonces  $Z = -\ln\left(\prod_{i=1}^k U_i\right)$  es una variable aleatoria con distribución  $\Gamma(k, 1)$

### **Demostración**

Por inducción en  $k$

Para  $k = 1$  si  $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$  entonces  $Z = -\ln U$ , la función de densidad es  $f_Z(z) = e^{-z}$  con  $z > 0$ , luego es cierto para  $k = 1$  que  $Z \sim \Gamma(1, 1)$ . Supongamos cierto para  $k$  y probemos para  $k + 1$ .

Llamemos  $X = -\ln(U_i)$  y  $Y = -\ln\left(\prod_{i=1}^k U_i\right)$ , por la hipótesis inductiva se tiene que  $Y \sim \Gamma(k, 1)$  y que la función de densidad de  $X$  es  $f_X(x) = e^{-x}$ , entonces llamemos

$Z = -\ln\left(\prod_{i=1}^{k+1} U_i\right) = X + Y$  y teniendo en cuenta que  $0 \leq e^{-x} \leq 1$

$$f_Z(z) = \int f_X(z - y) f_Y(y) dy = \int_0^z e^{-z+y} \frac{y^{k-1} e^{-y}}{\Gamma(k)} dy = \frac{e^{-z}}{\Gamma(k)} \int_0^z y^{k-1} dy = \frac{e^{-z}}{\Gamma(k)} \frac{z^k}{k} = \frac{e^{-z} z^k}{\Gamma(k+1)}$$
 luego se tiene que  $Z \sim \Gamma(k + 1, 1)$ .

Proposición: Si  $Y \sim \Gamma(\alpha + 1, 1)$  y  $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$  y  $\alpha < 1$  entonces  $YU^{1/\alpha} \sim \Gamma(\alpha, 1)$

Demostración

Si  $Y \sim \Gamma(\alpha + 1, 1)$  entonces su función de densidad es  $f_Y(y) = \frac{y^\alpha e^{-y}}{\Gamma(\alpha+1)}$  y si  $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$  entonces la variable aleatoria  $X = -\ln U$  tiene distribución exponencial con parámetro 1 y su función de densidad es  $f_X(x) = e^{-x}$ . Consideraremos la variable aleatoria  $W = U^{1/\alpha}$  entonces su función de densidad es  $f_W(w) = f_U(w^\alpha) \cdot \alpha w^{\alpha-1}$  como  $0 \leq w^\alpha \leq 1$  entonces  $f_W(w) = \alpha w^{\alpha-1}$  y por hipótesis  $\alpha < 1$  luego  $0 < \alpha w^{\alpha-1} < 1$ . Si llamamos  $Z = YU^{1/\alpha}$  entonces su densidad es  $f_Z(z) = \int_0^\infty f_W\left(\frac{z}{y}\right) f_Y(y) \frac{1}{y} dy$  está definida para  $0 \leq \frac{z}{y} \leq 1$  luego  $0 \leq z \leq y$  entonces obtenemos  $f_Z(z) = \int_z^\infty \alpha \left(\frac{z}{y}\right)^{\alpha-1} \frac{y^\alpha e^{-y}}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{y} dy = \frac{\alpha z^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} \int_z^\infty e^{-y} dy = \frac{\alpha z^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} e^{-z}$  que es la densidad de una variable con distribución  $\Gamma(\alpha, 1)$ .

## Apéndice C

# La Base B-Spline

### Funciones Base Uniforme

Según las fórmulas dadas en el capítulo 4 se deducen las ecuaciones de las funciones de la base. Damos aquí algunos ejemplos. Solamente se presentan las ecuaciones de las funciones  $B_0, d(s)$ ,  $d = 1, \dots, 4$ , ya que las funciones  $B_{n,d}(s)$ ,  $n = 1, \dots, N_B$  se calculan como traslaciones de la primera, como muestra la ecuación 4.4.

Función  $B_{0,1}(s)$

$$B_{0,1}(s) = \begin{cases} 1 & 0 \leq s < 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

La Figura C.1 muestra el gráfico de esta función.

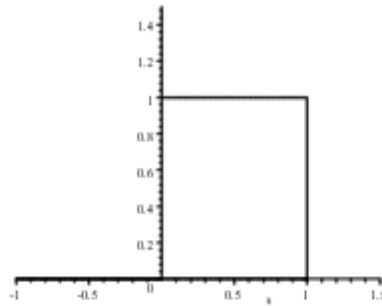


Figura C.1: Gráfico de la función  $B_{0,1}(s)$

Función  $B_{0,2}(s)$

$$B_{0,2}(s) = \begin{cases} s & 0 \leq s < 1 \\ 2 - s & 1 \leq s < 2 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

La Figura C.2 muestra el gráfico de esta función

La Figura C.3 muestra el gráfico de las funciones  $B_{0,2}(s)$  y  $B_{1,2}(s)$

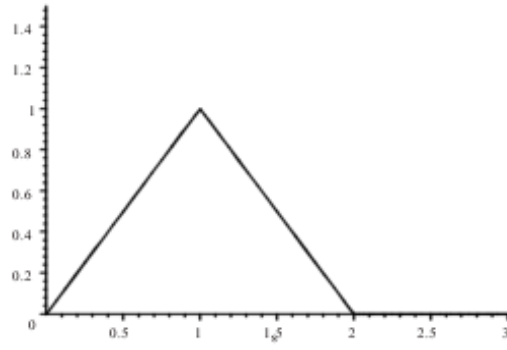


Figura C.2: Gráfico de la función  $B_{0,2}(s)$

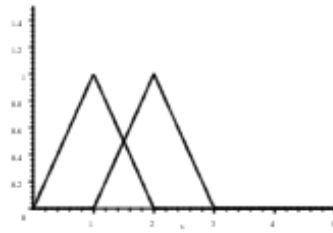


Figura C.3: Gráfico de la función  $B_{0,2}(s)$  y  $B_{1,2}(s)$

Función  $B_{0,3}(s)$

$$B_{0,3}(s) = \begin{cases} \frac{s^2}{2} & 0 \leq s \leq 1 \\ -s^2 + 3s - \frac{3}{2} & 1 \leq s < 2 \\ \frac{1}{2}s^2 - 3s + \frac{9}{2} & 2 \leq s < 3 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

En la Figura C.4 se muestra su gráfica junto con el gráfico de  $B_{1,3}(s)$ .

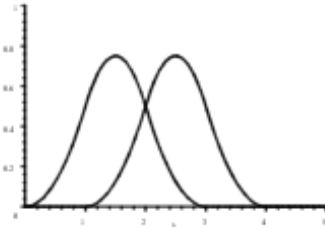


Figura C.4: Gráfico de la función  $B_{0,3}(s)$  y  $B_{1,3}(s)$

Función  $B_{0,4}(s)$

$$B_{0,4}(s) = \begin{cases} \frac{s^3}{6} & 0 \leq s < 1 \\ -\frac{s^3}{2} + 2s^2 - 2s + \frac{2}{3} & 1 \leq s < 2 \\ \frac{s^3}{2} - 4s^2 + 10s - \frac{22}{3} & 2 \leq s < 3 \\ -\frac{s^3}{6} + 2s^2 - 8s + \frac{32}{3} & 3 \leq s < 4 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (C.1)$$

En la Figura C.5 se muestra el gráfico correspondiente junto con el gráfico de  $B_{1,4}(s)$

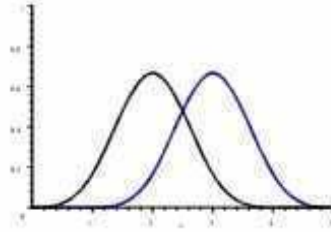


Figura C.5: Gráfico de la función  $B_{0,4}(s)$  y  $B_{1,4}(s)$

En la siguiente sección se presenta una forma útil de describir las curvas B-Spline, en forma matricial, que se utiliza para la implementación del algoritmo.

## C.1. B-Spline usando matrices *span*

Llamamos *span*  $S_\sigma$  al intervalo  $[\sigma, \sigma + 1)$ ,  $\sigma = 0, \dots, N_B - 1$ . En un *span* existen solamente  $d$  funciones base no nulas, entonces definimos

$$b_\sigma = \left( \sum_{i=0}^{\sigma} m_i \right) - d$$

donde  $m_i$  es la multiplicidad del nodo  $s_i$ , entonces la curva  $x(s)$  puede escribirse como combinación lineal de las  $d$  funciones base no nulas:

$$x(s) = \sum_{i=b_\sigma}^{b_\sigma+d-1} x_i B_{i,d}(s)$$

Podemos definir para cada *span*  $S_\sigma$  una matriz  $B_\sigma^S$  de coeficientes.

Las matrices *span*  $B_\sigma^S$  se construyen poniendo en la columna  $i$  de la matriz, los coeficientes polinomiales correspondientes a las funciones bases  $B_{b_\sigma+i-1}$  sobre el *span* que se está considerando y ordenados de arriba hacia abajo por el grado del coeficiente, es decir, en la primer fila el coeficiente de grado cero.

De esta manera es posible definir la curva en cada *span*  $S_\sigma$  como:

$$x(s)^\sigma = \left(1, s, s^2, \dots, s^d\right) B_\sigma^S \begin{pmatrix} x_{b_\sigma} \\ x_{b_\sigma+1} \\ x_{b_\sigma+2} \\ \vdots \\ x_{b_\sigma+d} \end{pmatrix}$$

Consideramos una matriz de permutaciones  $G_\sigma$  y el vector de puntos de control  $Q^x$ , entonces podemos escribir

$$x(s)^\sigma = \left(1, s, s^2, \dots, s^d\right) B_\sigma^S G_\sigma \begin{pmatrix} x_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{N_B-1} \end{pmatrix}$$

donde  $G_\sigma$  es una matriz de  $d \times N_B$  y definida como

$$G_\sigma(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i - b_\sigma = j \pmod{N_B} \\ 0 & \text{si } i - b_\sigma \neq j \end{cases}$$

Por ejemplo, en el intervalo  $[n, n+1)$ , con multiplicidad simple y  $d = 4$ ,  $b_\sigma = n+1-4 = n-3$ , luego se puede escribir la curva como combinación lineal de 4 funciones bases que serán

$$x(s) = B_{n-3,4}(s) x_{n-3} + B_{n-2,4}(s) x_{n-2} + B_{n-1,4}(s) x_{n-1} + B_{n,4}(s) x_n. \text{ para } s \in [n, n+1)$$

Las Figuras C.6 y C.7 muestran las funciones base involucradas en el *span*  $[3, 4)$ , que son  $B_{1,3}(s)$ ,  $B_{2,3}(s)$  y  $B_{3,3}(s)$ . La Figura C.6 muestra las funciones completas mientras que la Figura C.7 muestra solamente los segmentos polinomiales del *span*.

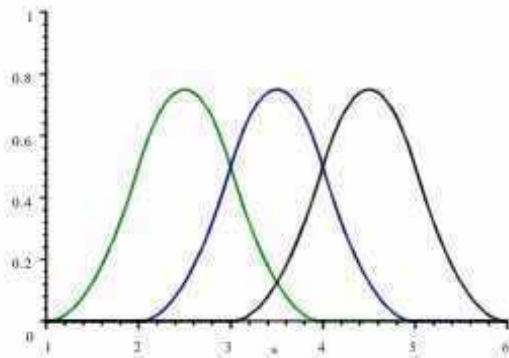


Figura C.6: Gráfico de las funciones involucradas en el *span*  $[3, 4)$ :  $B_{1,3}(s)$ ,  $B_{2,3}(s)$  y  $B_{3,3}(s)$

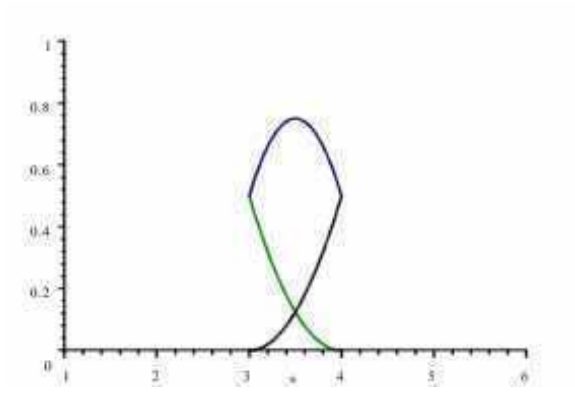


Figura C.7: Gráfico de los segmentos polinomiales de las funciones involucradas en el *span*  $[3, 4]$ :  $B_{1,3}(s)$ ,  $B_{2,3}(s)$  y  $B_{3,3}(s)$

## C.2. Implementación

Una vez calculadas las matrices  $B_\sigma^S$  y  $G_\sigma$  para  $\sigma = 0, \dots, N_B - 1$ , es posible escribir la ecuación de  $x(s)$  en el *span*  $S_\sigma$ , llamado  $x(s)^\sigma$ , de la siguiente manera.

$$x(s)^\sigma = \left(1, s, \dots, s^{d-1}\right) B_\sigma^S G_\sigma \begin{pmatrix} x_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{N_B-1} \end{pmatrix}, \text{ donde } \sigma \leq s \leq \sigma + 1$$

o también puede escribirse como

$$x(s + \sigma) = \left(1, (s + \sigma), \dots, (s + \sigma)^{d-1}\right) B_\sigma^S G_\sigma \begin{pmatrix} x_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{N_B-1} \end{pmatrix}, 0 \leq s < 1$$

luego la curva B-Spline queda definida por la siguiente ecuación:

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, (s + \sigma), \dots, (s + \sigma)^{d-1} & 0, \dots, 0 \\ 0, \dots, 0 & 1, (s + \sigma), \dots, (s + \sigma)^{d-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_\sigma^S G_\sigma & 0 \\ 0 & B_\sigma^S G_\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^x \\ Q^y \end{pmatrix}, 0 \leq s < 1$$

Luego, la recta tangente en cada punto está dada por la siguiente ecuación

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, 1, 2(s + \sigma), \dots, (d - 1)(s + \sigma)^{d-2} & 0, \dots, 0 \\ 0, \dots, 0 & 0, 1, 2(s + \sigma), \dots, (d - 1)(s + \sigma)^{d-2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_\sigma^S G_\sigma & 0 \\ 0 & B_\sigma^S G_\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^x \\ Q^y \end{pmatrix}$$

y la rectanormal normal en cada punto está dada por

$$\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y' \\ x' \end{pmatrix}.$$

## Apéndice D

# Implementación del Algoritmo de Difusión Anisotrópica

La resolución discreta de la difusión anisotrópica es realizar  $N$  iteraciones de la siguiente ecuación:

$$I_{ij}^{t+1} = I_{ij}^t + \lambda (c_n D_n + c_s D_s + c_e D_e + c_o D_o), \quad t \geq 0$$

donde

$$D_n = I_{i-1j} - I_{ij}, \quad D_s = I_{i+1j} - I_{ij}, \quad D_e = I_{ij-1} - I_{ij}, \quad D_o = I_{ij+1} - I_{ij}$$

y

$$c_k = g(D_k), \quad \text{para } k = n, s, e, o$$

$I_{ij}^0$  es la imagen inicial en el pixel  $(i, j)$ ,  $D_n, D_s, D_e, D_o$  son las derivadas norte, sur, este y oeste, respectivamente para un pixel  $(i, j)$  y  $g(s)$  es alguno de los operadores considerados, en este caso Lorentz o Leclerc.

Lorentz:

$$g(s) = \frac{1}{1 + \frac{s^2}{2\sigma^2}}$$

Leclerc:

$$g(s) = e^{-\frac{s^2}{2\sigma^2}}$$

Los parámetros  $N$ ,  $\lambda$ , y  $\sigma$  son parámetros de entrada y pueden elegirse arbitrariamente.





# Bibliografía

- [1] L. Alvarez, P. Lions, and J. M. Morel. Image Selecting Smoothing and Edge Detection by non-linear Diffusion. *Siam J. Numerical Analysis*, 29(3), 1992.
- [2] Ismail Ben Ayed, Amar Mitiche, and Ziad Belhadj. Multiregion Level-Set Partitioning of Synthetic Aperture Radar Images. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 27(5):793–800, 2005.
- [3] Ismail Ben Ayed, Carlos Vazquez, Amar Mitiche, and Ziad Belhadj. SAR Image Segmentation with Active Contours and Level Sets. In *ICIP*, pages 2717–2720, 2004.
- [4] J. Babaud, A. Witkin, and R. Duda. Uniqueness of the Gaussian Kernel for Scale-Space Filtering. *IEEE Transaction on Pattern Anal. and Machine Intelligence*, 8(1), 1986.
- [5] B.Chaudhuri and N.Sakar. Texture Segmentation using Fractal Dimension. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell*, 25(17):72–76, 1995.
- [6] F. Berizzi and E. Dalle-Mese. Fractal Analysis of the Signal Scattered from the Sea Surface. *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, 47(2):324 – 338, 1999.
- [7] Marcelo Bertalmío, Guillermo Sapiro, and Gregory Randall. Morphing active contours: A geometric approach to topology-independent image segmentation and tracking. In *ICIP (3)*, pages 318–322, 1998.
- [8] J.M. Blackledge and E. Fowler. Fractal Dimensions Segmentation of Synthetic Aperture Radar Images. In *International Conference on Image Processing and its Applications*, pages 445–449. IEEE, 1992.
- [9] A. Blake and M. Isard. *Active Contours*. Springer Verlag, 1998.
- [10] F. Bookstein. Thin Plate Splines and the Descomposition of Deformations. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1:45–50, 1986.
- [11] A. Bovik. On Detecting Edge in Speckle Imagery. *IEEE Trans. Acoust., Speech Signal Processing*, 36(10):1618–1627, 1988.

- [12] P. Brigger, J. Hoeg, and M. Unser. B-spline snakes: A flexible tool for parametric contour detection. *IEEE Trans. on Image Processing*, 9(9):1484–1496, Sept. 2000.
- [13] J. Canny. A Computational Approach to Edge Detection. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell*, 8(8):679–698, 1986.
- [14] T. Chan and L. Vese. Active Contours without Edges. *IEEE Trans. Image Processing*, 10(2):265–277, 2001.
- [15] S.S. Chen, J.M. Keller, and R.M. Crownover. On the calculation of fractal features from images. *Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 15(10):1087–1090, 1993.
- [16] E. Chuvieco. *Fundamentos de Teledetección Espacial*. Rialp Ediciones, Madrid, 1996.
- [17] R. Cipolla and A. Blake. The dynamic analysis of apparent contours. In *Proceedings of the 3rd Int. Conf. on Computer Vision*, pages 616–625, 1990.
- [18] L. D. Cohen. On active contour models and balloons. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing. Image Understanding*, 53(2):211–218, 1991.
- [19] Laurent D. Cohen and Isaac Cohen. Finite-element methods for active contour models and balloons for 2-d and 3-d images. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 15(11):1131–1147, 1993.
- [20] T.J. Dennis and N.G. Dessiripis. Fractal modelling in image texture and analysis. In *IEEE Proceedings*, 136F(5). IEEE, 1989.
- [21] L. Devroye. Algorithms for generating discrete random variables with a given generating function or a given moment sequence. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 12:107–126, 1991.
- [22] Luc Devroye. *Non-Uniform Random Variate Generation*. Springer Verlag, 1986.
- [23] W. Dierking, H. Skriver, and P. Gudmandsen. SAR Polarimetric for Sea Ice Monitoring. In *ESA POLInSAR workshop, ESRIN*, 2003.
- [24] G. Du and T. S. Yeo. A Novel Multifractal Estimation Method and its Application to Remote Image Segmentation. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, 40:980–982, 2002.
- [25] Adriana Dumitras and Anastasios Venetsanopoulos. A comparative study of snake models with application to object shape description in bi-level and grey-level images. In *EURASIP, Workshop on non-linear Signal and Image Processing*. IEEE, 2001.
- [26] K. Falconer. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley & Sons, Chichester, England, 1990.

- [27] G. Farin. *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometrical Design*. Academic Press, Boston, USA, 1990.
- [28] Olivier D. Faugeras and Renaud Keriven. Variational principles, surface evolution, pdes, level set methods, and the stereo problem. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7(3):336–344, 1998.
- [29] Pedro F. Felzenszwalb. Representation and Detection of Deformable Shapes. In *CVPR (1)*, pages 102–108, 2003.
- [30] L. Ferro-Famil, D. Corr, E. Pottier, and A. Rodrigues. Statistical segmentation of polarimetric SAR data. In *POLinSAR 2003, Workshop on applications of SAR polarimetry and polarimetric interferometry*, 2003.
- [31] L. Ferro-Famil and J. Lee. Unsupervised Classification of Multifrequency and Fully Polarimetric SAR Images based on the H-A-Alpha-Wishart Classifier. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, 39:2332–2342, 2001.
- [32] Mário A. T. Figueiredo, José M.Ñ. Leitão, and Anil K. Jain. Adaptive b-splines and boundary estimation. In *CVPR*, pages 724–, 1997.
- [33] Mário A. T. Figueiredo, José M.Ñ. Leitão, and Anil K. Jain. Unsupervised contour representation and estimation using b-splines and band a minimum description lenght criterion. *IEEE Trans. on Image Proces.*, 9:1075–1087, 2000.
- [34] R. Fjortoft. *Segmentation d’images radar par détection de contours*. PhD thesis, CESBIO-LIMA/ENSEEIH, Intitut National Polytechnique de Toulouse, France, 1999.
- [35] R. Fjortoft, A. Lopès, J. Bruniquel, and P. Marthon. Optimal Edege Detection and Edge Localization in complex SAR Images with Correlated Speckle. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, 37, 1999.
- [36] R. Fjortoft, A. Lopès, P. Marthon, and E. Cubero-Castan. An Optimun Multiedege Detector for SAR Image Segmetation. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, 37, 1998.
- [37] Myron Flickner, James L. Hafner, Eduardo J. Rodríguez, and Jorge L. C. Sanz. Fast least-squares curve fitting using quasi-orthogonal splines. In *ICIP (1)*, pages 686–690, 1994.
- [38] A. C. Frery. *Algumas ferramentas estatísticas na síntese, análise e processamento de imagens de radar de abertura sintética*. PhD thesis, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, SP, Brazil, 1993.
- [39] A. C. Frery, A. H. Correia, C. D. Rennó, C. C. Freitas, J. Jacobo-Berlles, M. E. Mejail, and K. L. P. Vasconcellos. Models for Synthetic Aperture Radar Image Analysis. *Resenhas (IME-USP)*, 4(1):45–77, 1999.

- [40] A. C. Frery, H.-J. Müller, C. C. F. Yanasse, and S. J. S. Sant’Anna. A model for extremely heterogeneous clutter. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 35(3):648–659, May 1997.
- [41] A. C. Frery and S. J. S. Sant’Anna. Non-adaptive robust filters for speckle noise reduction. In *Simpósio Brasileiro de Computação Gráfica e Processamento de Imagens*, 6., pages 165–174, Recife, PE, Brazil, 1993. SBC/UFPE.
- [42] V. Frost, K. Shanmugan, and Holtzman J. Edge detection for SAR and other noisy images. In *GeoScience Remote Sensing Symp. vol. FA2*, pages 4.1–4.9, Munich, Germany, 1982.
- [43] Oliver Germain. *Edge detection and localization in SAR images: a comparative study of global filtering and active contour approaches*. PhD thesis, Université de Droit, d’Economie et des Science d’Aix-Marseille, 2001.
- [44] Oliver Germain and P. Réfrégier. Edge location in SAR Images: Performance of the Likelihood Ratio Filter and Accuracy Improvement with an Active Contour Approach. *IEEE Transaction on Image Processing*, 10(1), 2001.
- [45] Olivier Germain and Philippe Réfrégier. Statistical Active Grid for Segmentation Refinement. *Pattern Recognition Letters*, 22(10):1125–1132, 2001.
- [46] R.C. González and R. Woods. *Tratamiento Digital de Imágenes*. Addison Wesley-Diaz de Santos, 1996.
- [47] J. W. Goodman. *Statistical Optics, Pure and Applied Optics*. Wiley, New York, USA, 1985.
- [48] N. R Goodman. The Distribution of the Determinant of a Complex Wishart Distributed Matrix. *Annals of Mathematical Statistics*, 34:178–180, 1963.
- [49] N. R Goodman. Statistical Analysis based on a certain complex Gaussian distribution(an Introduction). *Annals of Mathematical Statistics*, 34:152–177, 1963.
- [50] Yu-Hua Gu and Tardi Tjahjadi. Efficient planar object tracking and parameter estimation using compactly represented cubic b-spline curves. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part A*, 29(4):358–367, 1999.
- [51] Yu-Hua Gu and Tardi Tjahjadi. Coarse-to-fine planar object identification using invariant curve features and b-spline modeling. *Pattern Recognition*, 33(9):1411–1422, 2000.
- [52] Steven Haker, Guillermo Sapiro, and Allen Tannenbaum. Knowledge-based segmentation of SAR images. In *ICIP (1)*, pages 597–601, 1998.
- [53] Parag Havaldar and Gérard G. Medioni. Segmented shape descriptions from 3-view stereo. In *ICCV*, pages 102–108, 1995.

- [54] S. Hong and W. Moon. Application of gaussian Markov random field model to unsupervised classification in polarimetric SAR image. In *IGARSS*, pages 929–931, July 2003.
- [55] B. Huang, H. G. Li, and X. Huang. A Level Set Approach to Segmentation of Oil Slicks in SAR Images. *International Journal of Remote Sensing*, 2(6):1145–1156, 2005.
- [56] Fuzhen Huang and Jianbo Su. Deformable Pedal Curves with Application to Face Contour Extraction. In *CVPR (1)*, pages 328–333, 2003.
- [57] Alfred O. Hero III, Robinson Piramuthu, Jeffrey A. Fessler, and Steven R. Titus. Minimax emission computed tomography using high-resolution anatomical side information and b-spline models. *IEEE Transactions on Information Theory*, 45(3):920–938, 1999.
- [58] J. Jacobo-Berlles, M. J. Gambini, M. E. Mejail, H. Muller, and A. C. Frery. B-spline curve fitting in SAR images. In *Proceedings EUSAR02*, 2002.
- [59] J. Jacobo Berllés. *Nuevas Familias de Distribuciones Polarimétricas para Imágenes SAR*. PhD thesis, Departamento de Computación, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 2005.
- [60] A. K. Jain. *Fundamentals of Digital Image Processing*. Prentice-Hall International Editions, Englewood Cliffs, NJ, 1989.
- [61] E. Jakeman and R. J. A. Tough. Generalized K distribution: a statistical model for weak scattering. *Journal of the Optical Society of America A*, 4(9):1764–1772, September 1987.
- [62] M. Kass, A. Withkin, and D. Terzopoulos. Snakes: Active contour model. *International Journal of Computer Vision*, 1(1):321–333, March 1988.
- [63] T. Keller. Texture description and segmentation through fractal geometry. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 45:150–166, 1989.
- [64] D. Kim. B-spline representation of active contours. In *Fifth International Symposium on Signal Processing and its Applications, ISSPA '99*, Brisbane, Australia, 1999.
- [65] J. Koendrik. The structure of the images. *Biol. Cybern*, 50:363–370, 1984.
- [66] J. Lee, M. Grunes, and Gianfranco de Grandi. Polarimetric SAR speckle filtering and its implication for classification. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, 37(5):2363–2373, 1999.
- [67] J. Lee, D. Schuler, R. Lang, and K. Ranson. K-distribution for Multilook Processed Polarimetric SAR Imagery. In *International Geoscience and Remote Sensing Symposium: Surface and Atmospheric Remote Sensing: Technologies, Data Analysis and Interpretation*, pages 2179–2181, Pasadena, USA, 1994.

- [68] J. S. Lim. *Two-Dimensional Signal and Image Processing*. Prentice Hall Signal Processing Series. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1989.
- [69] Y. Liu and Y. Li. Image feature extraction and segmentation using fractal dimension. In *International Conference on Information and Signal Processing*, pages 975–979. IEEE, Sept. 1997.
- [70] A. Lopes, E. Nézry, R. Touzi, and H. Laur. Structure detection and statistical adaptive speckle filtering in SAR images. *International Journal of Remote Sensing*, 14(9):1735–1758, 1993.
- [71] C. Lopez-Martinez and X. Fabregas. Polarimetric SAR speckle noise model. *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, 41(10):2232 – 2242, 2003.
- [72] A. Lopès and F. Séry. Optimal speckle reduction for the product model polarimetric SAR imagery and the Wishart distribution. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, 35(3):632–647, 1997.
- [73] C. López-Martínez, K. Papathanassiou, and X. Fàbregas Cànovas. Polarimetric and interferometric noise modelling. In *Proceedings IGARSS*, pages 835–837, Toronto, Canada, June 2002.
- [74] R. Malladi, J. A. Sethian, and B. C. Vemuri. A fast level set based algorithm for topology-independent shape modeling. *J. Math. Imaging and Vision*, 6(2/3):269–290, 1996.
- [75] B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman, 1983.
- [76] B. Mandelbrot and J. van Ness. Fractional brownian motion, fractional noises and applications. *Siam Review*, 10:422–437, 1968.
- [77] A. Mansouri, A. Mitiche, and C. Vazquez. Image segmentation by multiregion competition. In *Proc. Reconnaissance de Forme et Intelligence Artificielle RFIA-04*. France, 2004.
- [78] D. Marr and E. Hildreth. Theory of edge detection. In *Proceedings of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences.*, pages 187–217, 1980.
- [79] D. Marr and E. Hildreth. Theory of edge detection. In *Computer Vision*, pages 77 – 107. R. Kasturi and R. C. Jain editors, IEEE, Los Alamitos, CA., 1991.
- [80] M. Martorella, F. Berizzi, and E. Dalle-Mese. On the fractal dimension of sea surface backscattered signal at low grazing angle. *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, 52(5):324 – 338, 2004.
- [81] Tim McInerney and Demetri Terzopoulos. Medical image segmentation using topologically adaptable snakes. In *CVRMed*, pages 92–101, 1995.

- [82] G. Medioni and Y. Yasumoto. Corner detection and curve representation using curve b-splines. In *Proc. Conf. Computer Vision and Pattern recognition*, pages 764–769, 1986.
- [83] M. Mejail, J. C. Jacobo-Berlles, A. C. Frery, and O. H. Bustos. Classification of SAR images using a general and tractable multiplicative model. *International Journal of Remote Sensing*, 24(18):3565–3582, 2003.
- [84] M. E. Mejail. *La Distribución  $\mathcal{G}_A^0$  en el modelado y Análisis de Imágenes SAR*. PhD thesis, Departamento de Computación, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 1999.
- [85] M. E. Mejail, A. C. Frery, J. Jacobo-Berlles, and O. H. Bustos. Approximation of distributions for SAR images: Proposal, evaluation and practical consequences. *Latin American Applied Research*, 31:83–92, 2001.
- [86] Marta Estela Mejail, J. Jacobo-Berlles, A. C. Frery, and O. H. Bustos. Parametric roughness estimation in amplitude SAR images under the multiplicative model. *Revista de Teledetección*, 13:37–49, 2000.
- [87] R. K. Moore, F.T. Ulaby, and A.K. Fung. *Microwave Remote Sensing: Active and Passive, vol. II: Radar Remote Sensing and Surface scattering and emission Theory*. Prentice Hall Signal Processing Series. Addison Wesley Publishing Company, London, 1982.
- [88] H.-J. Müller, A. C. Frery, J. Jacobo-Berlles, M. Mejail, and J. Moreira. The harmonic branch of the multiplicative model: Properties and applications. In *Third European Conference on Synthetic Aperture Radar*, pages 603–606, München, Germany, May 2000.
- [89] C. Oliver, I.M. Connell, and R. White. Optimun edge detection in SAR. *SPIE on Satellite Remote Sensing*, 2584:152–163, 1995.
- [90] C. Oliver and S. Quegan. *Understanding Synthetic Aperture Radar Images*. Artech House, Boston, 1998.
- [91] S. Osher and N. Paragios. *Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision and Graphics*. Springer, first edition, 2003.
- [92] S. Osher and J. Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79:12–49, 1988.
- [93] K. Papathanassiou, T. Mette, and I. Hajnsek. Model based forest height estimation from single baseline polinsar data: The fichtelgebirge test case. In *ESA POLInSAR workshop, ESRIN*, 2003.



- [94] N. Paragios and R. Deriche. Coupled geodesic active regions for image segmentation: A level set approach. In *Proc. European Conf. Computer Vision*, pages 224 – 240, June 2000.
- [95] Massimiliano Pavan and Marcello Pelillo. Graph-theoretic approach to clustering and segmentation. In *CVPR (1)*, pages 145–152, 2003.
- [96] H. O. Peitgen, H. Jürgens, and D. Saupe. *Fractals for the classroom, Part II*. Springer-Verlag, 1986.
- [97] H. O. Peitgen, H. Jürgens, and D. Saupe. *Fractals for the classroom, Part I*. Springer-Verlag, 1992.
- [98] H. O. Peitgen and D. Saupe. *The Science of Fractal Images*. Springer-Verlag, 1986.
- [99] T. Peli. Multiscale fractal theory and object characterization. *Journal of the Optical Society of America*, 7(6):1113–1123, 1990.
- [100] P. Perona and J. Malik. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 12(7):629–639, 1990.
- [101] I Pollack, S. Willski, and H. Krim. Image segmentation and edge enhancement with stabilized inverse diffusion equation. *IEEE Trans. on Image Processing*, 9(2):256–266, 2000.
- [102] I. Pollak. Nonlinear multiscale filtering. In *Signal Processing Magazine*, pages 26 – 36, Sep. 2002.
- [103] W. Pratt. *Digital Image Processing*. John Wiley and Sons, New York, 1978.
- [104] F. Precioso, M. Barlaud, T. Blu, and M. Unser. Smoothing B-Spline active contour for fast and robust image and video segmentation. In *Proceedings of the 2003 IEEE International Conference on Image Processing (ICIP’03)*, volume I, pages 137–140, Barcelona, Spain, September 14-17 2003.
- [105] M. Quartulli and M. Datcu. Stochastic geometrical modelling for built-up area understanding from a single SAR intensity image with meter resolution. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 42(9):1996–2003, 2004.
- [106] S. Quegan, M. Gomez-Dans, D. Gonzales-Sanpedro, D. Hoekman, T. Le Toan, and H. Skriver. Classification with multitemporal polarimetric SAR data. In *ESA POLIn-SAR workshop, ESRIN*, 2003.
- [107] D. F. Rogers and J. A. Adams. *Mathematical Elements for Computer Graphics*. McGraw-Hill, New York, USA, 2 edition, 1990.
- [108] H. Rom, P. Saint-Marc, and G. Medioni. B-spline contour representation and symmetry detection. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 15(11):1191–1197, 1993.

- [109] A. Rosenfeld and M. Turson. Edge and curve detection for visual scene and analysis. *IEEE Transactions on Computers*, 25(5):562–569, 1971.
- [110] N. Sakar and B. Chaudhuri. An efficient differential box-counting approach to compute fractal dimension of image. *IEEE Trans. on Systems Man and Cybernetics*, 24(1):72–76, 1994.
- [111] G. Sapiro. *Geometric Partial Differential Equations and Image Analysis*. Cambridge University Press, first edition, 2001.
- [112] B. Scheuchl, I. Hajnsek, and I.G. Cumming. Sea ice classification using multi-frequency polarimetric SAR data. In *Proc. IGARSS '02*, Toronto, Canada, 2002.
- [113] J. A. Sethian. *Level Set Methods and Fast Marching Methods: Evolving Interfaces in Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision and Materials Sciences*. Cambridge University Press, second edition, 1999.
- [114] Kaleem Siddiqi, Allen Tannenbaum, and Steven W. Zucker. A hamiltonian approach to the eikonal equation. In *Energy Minimization Methods in Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 1–13, 1999.
- [115] L. B. Silva, K. L. P. Vasconcellos, and A. C. Frery. Bias correction for covariance parameters estimates in polarimetric SAR data models. In *Second Latinoamerican Seminar on Radar Remote Sensing: Image Processing Techniques*, pages 45–48, Santos, SP, Brazil, Sept. 1998. European Space Agency (ESA).
- [116] D. Smith. Speckle Reduction and Segmentation of SAR Images. *International Journal of Remote Sensing*, 17(11):2043–205, 199.
- [117] M. S. Srivastava. On the complex Wishart distribution. *Annals of Mathematical Statistics*, 36(1):313–315, 1965.
- [118] M. Tabb and N. Ahuja. Multiscale image segmentation by integrated edge and region detection. *IEEE Trans. on Image Processing*, 25(5):642–655, 1997.
- [119] C. Tauber, H. Batatia, and A. Ayache. A robust speckle reducing anisotropic diffusion. In *International Conference on Image Processing*, pages 247 – 250. IEEE, IEEE, 2004.
- [120] R. Touzi, A. Lopès, and P. Bousquet. A statistical and geometrical edge detector for SAR images. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, 26(11):764–773, 1988.
- [121] M. Unser, A. Aldroubi, and M. Eden. B-Spline signal processing: Part I - Theory. *IEEE Trans. Signal Process.*, 41(2):821–833, 1993.
- [122] K. Vasconcellos and A. C. Frery. Improving estimation for intensity SAR data. *Interstat*, 4(2):1–25, 1998.

- [123] C. Vazquez, A. Mitiche, and I. Ben Ayed. Segmentation of vectorial images by global curve evolution method. In *Proc. Reconnaissance de Forme et Intelligence Artificielle RFIA-04*. France, 2004.
- [124] D. Wasserman, M.Mejail, J. Gambini, and M.Buemi. Segmentation with active contours: a comparative study of b-spline and level set methods. In *CXVII Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing (SIBGRAPI)/ II Ibero-American Symposium on Computer Graphics (SIACG)*. IEEE, 2004.
- [125] J. Weickert. *Anisotropic Diffusion in Image Processing*. Teubner-Verlag, first edition, 1998.
- [126] A. Witkin. Scale-space filtering. In *Int. Joint Conf. Artificial Intelligence*, pages 1019–1021, Karlsruhe, Germany, 1983.
- [127] Chenyang Xu and Jerry L. Prince. Gradient vector flow: A new external force for snakes. In *CVPR*, pages 66–, 1997.
- [128] A. Yezzi, A. Tsai, and A. Willsky. A fully global aproach to image segmentation via coupled curve evolution equations. *Journal of Visual Communication and Image Represetation*, 13(1):195–216, 2002.
- [129] Y. Yu and S.T Acton. Speckle reducing anistropic diffusion. *IEEE Trans. on Image Processing*, 11(11):1260–1270, 2002.
- [130] Y. Yu, J.A. Molloy, and S. T. Acton. Three-dimensional speckle reducing anisotropic diffusion. In *Conference on Signals, Systems and Computers, 2003. Conference Record of the Thirty-Seventh Asilomar*, pages 1987 – 1991. IEEE, 2003.
- [131] Y. Yu, J.A. Molloy, and S. T. Acton. Generalized speckle reducing anisotropic diffusion for ultrasound imagery. In *Proc. of the IEEE Symposium on Computer -Based Medical System*, pages 279 – 284. IEEE, 2004.
- [132] A. Yuille and T. Poggio. Scalling theorems for zero crossings. *IEEE Transaction on Pattern Anal. and Machine Intelligence*, 8(1), 1986.
- [133] S. Zhu and A. Yuille. Region competition: Unifying snakes, region growing and bayes/MDL for multiband image segmentation. *IEEE Transaction on Pattern Anal. and Machine Intelligence*, 18(9):884–900”, 1996.